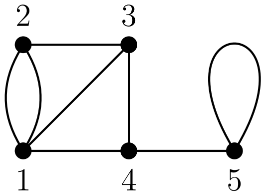
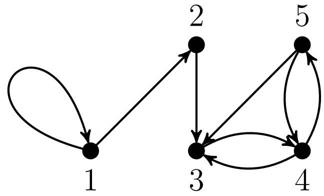
SzA IV. gyakorlat, 2013. október 1/3.
Keresőfázás, valamint barátkozás a gráfokkal

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. Szúrjuk be egy kezdetben üres bináris keresőfába a 6, 2, 1, 4, 5, 8, 9, 7, 10 elemeket, majd töröljük a 7, 8, 2 elemeket!

2. Írjuk fel a következő gráfok szomszédossági mátrixát!





3. **[ZH 2009. november 23.]** A következő tömbök egy gráf szomszédossági listáját írják le. A csúcshoz tartozó mutatók listája:

3	6	5	4	2

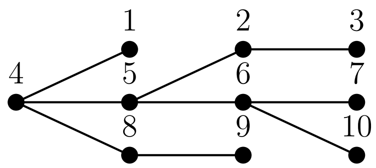
Az éleket leíró láncolt lista:

4	4	2	3	2	3	2	4	5	1
10	*	*	7	8	1	9	*	*	*

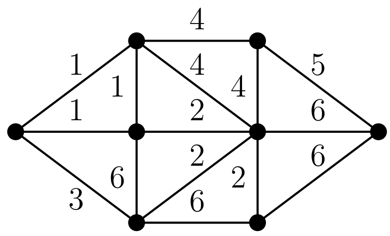
Rajzolja le a gráfot!

4. (a) Mi a Prüfer-kódja a következő fának?

   (b) Rajzoljuk le azt a fát, aminek $2, 5, 5, 1, 4, 6, 6, 5$ a Prüfer-kódja!



5. Mennyi a következő gráfban a minimális feszítőfa súlya? Hány különböző minimális feszítőfa van?



---

6. Adott egy n csúcsú és egy k csúcsú keresőfa. A két fában tárolt összes elemből $c(n + k)$ lépésben készítsünk rendezett tömböt!

7. Egy bináris keresőfában csupa különböző egész számot tárolunk. Lehetséges-e, hogy egy $KERES(x)$ hívás során a keresési út mentén a $20, 18, 3, 15, 5, 8, 9$ kulcsokat látjuk ebben a sorrendben? Ha lehetséges, határozzuk meg az összes olyan x egész számot, amire ez megtörténhet! Ha nem lehetséges, miért nem?

8. Egy bináris keresőfa csúcsait egy, a gyökértől egy levélig menő út szerint három osztályba soroljuk: B az úttól balra levő, U az útra eső, J pedig az úttól jobbra levő csúcsok halmazát jelöli. Igaz-e mindig, hogy minden B-beli csúcs kulcsa kisebb tetszőleges U-beli csúcs kulcsánál, és minden U-belis csúcs kulcsa kisebb tetszőleges J-beli csúcs kulcsánál?

9. ✎ Adott $2^k - 1$ különböző szám, mindegyik az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazból, ezekből kell egy k mélységű bináris keresőfát készíteni. Adjunk olyan algoritmust, amely ezt $c \cdot n$ lépésben megcsinálja!

---

10. Adott egy 5 pontú gráf élek nélkül. Írjuk fel a láncolt szomszédossági listáját, majd húzzuk be sorrendben a következő (irányítatlan) éleket: (1,3), (4,5), (5,5), (2,3), (1,2), (3,4), (1,4), (1,2).

11. **[pótZH, 2011. december 1.]** Az egyszerű, irányítatlan, 3-reguláris G gráf szomszédossági mátrixának bizonyos elemei kitörlődtek, csupán az alábbi maradt meg:

$$A(G) = \begin{pmatrix} ? & 1 & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ ? & 1 & ? & 1 & 0 & ? \\ ? & ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ ? & ? & ? & 1 & 1 & ? \end{pmatrix}$$

Rajzoljuk le a G gráfot (pontosabban annak egy diagramját).

12. Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?

13. **[pótZH, 2008. december 5.]** A K_6 gráf minden éléhez kiválasztunk 3 különböző számot az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazból. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is tesszük ezt, lesz két különböző él, amikhez ugyanazt a három számot választottuk.

14. Bizonyítsuk be, hogy egy gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros!

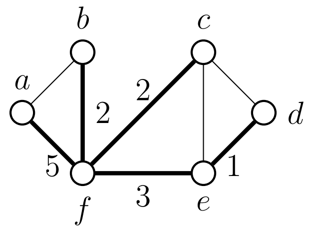
15. Rajzoljuk le az összes olyan fát, ami izomorf a komplementerével!

16. **[ZH, 2011. október 13.]** Az F fa Prüfer kódja $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)$. Hány éle van F komplementerének?

17. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?

18. **[pótZH, 2008. december 5.]** Legfeljebb hány pontja lehet annak a 19 élű G gráfnak, amiben minden pont fokszáma legalább 3?

19. **[ZH, 2011. október 13.]** Az ábrán látható G gráfnak megjelöltük egy F feszítőfáját és a feszítőfa éleinek súlyait. Határozzuk meg, mennyi lehet a G gráf feszítőfán kívüli éleinek minimális összsúlya akkor, ha F minimális súlyú feszítőfája G-nek.



20. Egy n pontú fa Prüfer-kódjában k különböző szám szerepel. Hány elsőfokú pontja lehet ekkor a fának?

21. Hány éle van az n pontú egyszerű öf. gráfnak, ha pontosan 3 különböző feszítőfája van?

22. Egy teljes gráf ponthalmaza $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$. Az (x_i, x_j) élek költsége (súlya) 1, az (y_i, y_j) éleké 2, az (x_i, y_j) éleké 3. Mennyibe kerül a legolcsóbb feszítőfa?

23. Igaz-e, hogy tetszőleges G egyszerű gráf esetén vagy G, vagy a komplementere összefüggő?

24. Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $n - 3$!

25. Igaz-e, hogy ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatók úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör?

26. Egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$. Bizonyítsuk be, hogy a gráf összefüggő!

27. Egy gráf izomorf a komplementerével. Mutassuk meg, hogy összefüggő!

28. **[pótpótZH 2010. ősz]** Mutassuk meg, hogy bármely véges G gráfnak legalább $|V(G)| - |E(G)|$ komponense van.

29. Bizonyítsuk be, hogy ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 T_1 éle, akkor létezik T_2-nek egy e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.