SzA II. gyakorlat, 2013. szeptember 17/19.
Hányféleképp?

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. **Hányféleképpen lehet az ötös lottón (90 számból ötöt húznak ki) ötös, négyes, illetve hármas találatom? (Feltételezhetjük, hogy a lottószámokat már kihúzták.)**
   5-ös nyilván egyféleképpen, hiszen minden számot el kell találni. 4-es esetén ki kell választani, hogy az 5 nyerőből melyik 4-et akarom eltelálni, és a maradék helyre melyik 1-et akarom választani a 85 nem nyerőből, vagyis $\binom{5}{4}\binom{85}{1}$. Hármas találat esetén ugyanezen az elven $\binom{5}{3}\binom{85}{2}$.

2. **Van 4 halmazunk: A_1, A_2, A_3, A_4. Mekkora $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$? Szita formula általánosan:**
$$\left|\bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} A_i\right| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} \cdot \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$
   Ezt nem gépelném be…

3. $(a+b)^5 = ?$
   Ezt sem…

4. **Egy dobozban 51 piros, 62 zöld és 30 sárga golyó van. Hányat kell (csukott szemmel) kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük**
   (a) **legalább két különböző?** 63, hiszen a skatulya-elv alapján ennyi elég, de 62 esetén lehet, hogy mindegyik zöld volt.
   (b) **legalább három piros?** 62+30+3, hiszen a skatulya-elv alapján ennyi elég, de eggyel kevesebb esetén lehet, hogy kihúztuk az összes nem pirosat, és még két pirosat.
   (c) **legalább két azonos?** 4, hasonló indoklással, mint eddig.

5. **Hány olyan szám van 1 és 1000 között (zárt intervallum), ami nem relatív prím 105-höz?**
   Azok nem relatív prímek $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$-hez, amik 3-mal, 5-tel vagy 7-tel oszthatók. A számukat a szita-formula segítségével könnyen megkaphatjuk: $|\text{3-mal oszthatók}| + |\text{5-tel oszthatók}| + |\text{7-tel oszthatók}| - |\text{15-tel oszthatók}| - |\text{21-gyel oszthatók}| - |\text{35-tel oszthatók}| + |\text{105-tel oszthatók}| = \lfloor 1000/3 \rfloor + \ldots$

---

6. **Bizonyítsuk be, hogy a jelenlévők között van legalább 2, aki a hét ugyanazon napján született!**
   Mivel a hétnek 7 napja van, a skatulya elv alapján 7-nél több ember nem születhetett különböző napon (és feltesszük, hogy többen vagyunk, mint 7).

7. **Hány olyan tízjegyű szám van, melyben a második számjegy 5-ös?**
   $9 \cdot 1 \cdot 10^8$, mert az első helyre 0-t nem választhatunk, második hely fix, az összes többire pedig az összes számjegyet választhatjuk.

8. **Hány olyan tízjegyű szám van, melyben szerepel az 5-ös számjegy?**
   Az összes lehetségesből eldobjuk azokat, amelyekben *nem* szerepel az 5-ös számjegy (az első helyen természetesn nem állhat 0): $9 \cdot 10^9 - 8 \cdot 9^9$.

9. **Hány olyan 10 hosszú 0-1 sorozat van, melyben legalább 8 darab egyes van?**
   Vagy minden jegy 1, vagy választanunk kell 1 helyet 1 nullának, vagy két 0-t kell elhelyzni: $1 + \binom{10}{1} + \binom{10}{2}$.

10. **256 bites kulccsal titkosítottam egy macskás videót, majd ezt elküldtem egy ismerősömnek emailben. Legfeljebb mennyi ideig kell próbálkoznia az NSA-nak a megnézéshez, ha feltételezzük, hogy másodpercenként 2^{30} kulcsot tudnak kipróbálni? (Feltesszük, hogy az adott titkosítást nem tudják trükkösen feltörni.)**
Mivel 2^{256} féle kulcs létezhet, így elképzelhető, hogy végig kell próbálniuk az összeset. Ez összes $\frac{2^{256}}{2^{30}} = 2^{226}$ másodperc, azaz nagyjából $3.42 \cdot 10^{60}$ év. (Az univerzum életkora kb. $1.38 \cdot 10^{10}$ év).

11. **Hány olyan négyjegyű szám van, melyben a jegyek szigorúan monoton növekvő sorrendben követik egymást?**
Észrevehetjük, hogy tetszőleges 4 különböző számjegyből tudunk a feltételeknek megfelelő számot előállítani, a számjegyek sorbarendezésével. A 0 nem szerepelhet, mert annak kéne az első jegynek lennie, ami nem jó. Így egyszerűen a 9 lehetséges számjegyből kell négyet választani: $\binom{9}{4}$.

12. **[pótZH, 2012. november 29.] A villamosmérnök szak mind az 556 hallgatója két-két ZH-t írt: egyet számítástudományból, egyet pedig analízisből. Számítástudományból senki sem ért el 36 pontnál többet. Bizonyítsuk be, hogy van négy olyan hallgató, akik amellett, hogy ugyanannyi pontot kaptak a számítástudomány ZH-jukra, analízisből is egyforma osztályzatot szereztek.**
A feltétel szerint egy hallgató 37 féle pontszámot szerezhetett SzA-ból, és ötféle osztályzatot analízisből, (2 pont)
így legfeljebb $37 \cdot 5 = 185$ féle lehet e két eredmény. (2 pont)
Ha egyetlen olyan eredménypár sem lenne, amit háromnál több hallgató ért el, akkor a hallgatók száma legfeljebb $3 \cdot 185 = 555$ volna, de tudjuk, hogy 556 a hallgatók száma. (5 pont)
Ezért van 4 olyan hallgató, akik azonos SzA pontszámot és Analízis érdemjegyet szereztek, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

13. **Egy 12 fős társaságot egy szálloda két háromágyas és három kétágyas szobájában kell elszállásolni. Hány különböző szobabeosztás lehetséges, ha az azonos számú ágyat tartalmazó szobákat nem különböztetjük meg egymástól?**
$\frac{\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{2!3!}$, mert a 12 emberből kiválasztunk hármat az első háromágyas szobába, aztán a maradékból megint hármat a másodikba sít. Ekkor viszont az azonos szobák különböző sorrendjeit külön eseteknek vettük, ezért kell az osztás.

14. **Hányféleképpen helyezhető el 20 különböző zászló 10 számozott zászlórúdra úgy, hogy egy rúdon tetszőlegesen sok zászló lehet (0 és 20 között), és az egyes rudakon a zászlók sorrendje nem számít?**
Minden zászlóhoz egymástól függetlenül el kell dönteni, hogy melyik rúdra kerüljön: 10^{20}.

15. **[ZH, 2009. október 19.] Van 4 különböző méretű almánk és 8 különböző méretű körténk. Hányféleképpen oszthatjuk szét őket két egyforma kosárba úgy, hogy mindkét kosárba ugyanannyi gyümölcs kerüljön és mindkét kosárban legyen mindkét gyümölcsből?**
Vegyük észre, hogy mivel a kosarak nem megkülönböztethetőek, a szimmetrikus esetek nem számítanak különbözőnek. Továbbá ha meghatározzuk az egyik kosárban a gyümölcsöket, akkor a másik kosár már adódik. A legkézenfekvőbbnek az tűnik, hogy az összes lehetséges esetből levonjuk a rossz eseteket. Az összes eset: $\frac{\binom{12}{6}}{2}$, az osztás a szimmetria miatt kell. Ekkor azok a rossz esetek, amikor nincs alma, csak körte. Ez $\binom{8}{6}$ féleképpen fordulhat elő. Vagyis a megoldás $\frac{\binom{12}{6}}{2} - \binom{8}{6}$. (Ezzel ekvivalens, ha az összes eset esetén a szimmetrikus

esetekkel nem problémázunk, ilyenkor ugyanúgy le kell vonni rosszként a csak körte eseteket, de a szimmetrikus 4 alma és 2 körte eseteket is. Ezután kell a szimmetriával foglalkozni: $\frac{\binom{12}{6}-\binom{8}{6}-\binom{4}{4}\binom{8}{2}}{2}$)

16. **[ZH, 2006.] A le- és felszállás meggyorsítása érdekében a Balkáni Közlekedési Társaság 20 napon keresztül, kísérleti jelleggel egy új, ajtó nélküli villamost közlekedtet. A villamos vezetésére egyelőre csak 15 dolgozónak van képesítése, azonban arra is vigyázni kell, hogy bármely négy egymást követő napon négy különböző dolgozó vezesse a kísérleti járművet. Hányféle lehet az említett 20 napon a kísérleti villamost vezetők sorrendje?**
Az első napi vezető 15 féle lehet. (2 pont)
A második napon 14, a harmadik napon 13, míg a negyedik napon 12 lehetséges személyből választható a vezető. (2 pont)
Az ezt követő napok mindegyikén a 15 lehetséges vezetőből az előző három napi vezető nem vezethet, (1 pont)
de a maradék 12 személy bármelyike igen. (2 pont)
Mivel minden egyes választást az előzményektől függetlenül tudtunk megtenni, ezért a lehetőségek száma a napi vezetőválasztási lehetőségek számának szorzata. (1 pont)
Összesen 16 napon választhatunk 12 lehetőségből, ezért a feladat kérdésére a válasz $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12^{16}$. (2 pont)

17. **Egy cirkuszban az állatidomár összesen 7 nagymacskát szeretne a porondra küldeni. A cirkusznak tigrisei, oroszlánjai és párducai vannak, mindből legalább 7 darab. Ha nem tudjuk megkülönböztetni az azonos fajú állatokat, akkor hányféle bevonulási sorrend közül választhat az idomár? És ha a sorrend nem számít?**
3^7, mert minden pozícióba választunk egy macskát a többitől függetlenül. Ha a sorrend nem számít, akkor ez az ismétléses kombináció $n = 3, k = 7$ esete.

18. **Hányféleképpen húzhatunk a 32 lapos magyar kártyapakliból 4 lapot úgy, hogy legyen benne**

    (a) **piros vagy ász?** $\binom{32}{4} - \binom{21}{4}$, vagyis az összesből levonva a rossz húzásokat.

    (b) **piros és ász?** $\binom{32}{4} - \binom{24}{4} - \binom{28}{4} + \binom{21}{4}$, vagyis az összesből levonjuk az így és az úgy rosszakat, viszont a mindkét feltétel szerinti rosszakat kétszer is levontuk, ezért ezeket az eseteket hozzá kell még adni.

19. **Bizonyítsuk be, hogy egy csoportban mindig van legalább két olyan ember, akik ugyanannyi embert ismernek a csoportból! (Az ismeretségek kölcsönösek.)**
Tfh nincs két ilyen ember, azaz mindenki különböző számú embert ismert. Egy ember legkevesebb 0, legfeljebb $n - 1$ embert ismerhet (ha n ember van a csoportban). Így az n-féle ismerettségi érték csak úgy jöhet létre, ha van, aki $0, 1, \ldots, n - 1$ embert ismer. Viszont ekkor az kéne, hogy valaki egy embert sem ismer, valaki más pedig mindenkit, ami lehetetlen.

20. **Igazoljuk, hogy öt darab, 10-nél nagyobb prím között lenni kell kettőnek, amik különbsége osztható 10-zel!**
A 10-nél nagyobb prímek biztos nem oszthatók 2-vel és 5-tel, így utolsó számjegyük csak az $\{1, 3, 7, 9\}$ halmaz valamelyik eleme lehet. Viszont mivel 5 prímünk és csak legfeljebb 4 utolsó számjegyünk van, így biztos van 2 olyan (a skatulya-elv miatt), amiknek ugyanaz az utolsó számjegye, vagyis különbségük osztható 10-zel.

21. **Bizonyítsuk be, hogy**

(a) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

(b) $n\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1} + k\binom{n}{k}$

Egyszerű átalakításokkal, nem szeretném begépelni.