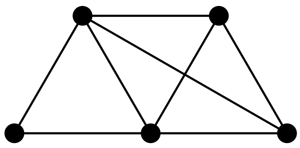
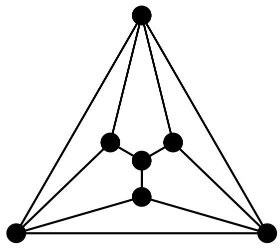
SzA X/XI. gyakorlat, 2013. november 14/19.
Színezünk és rajzolunk

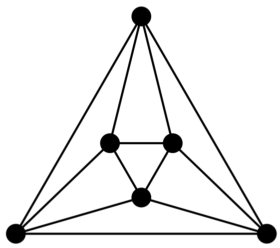
Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

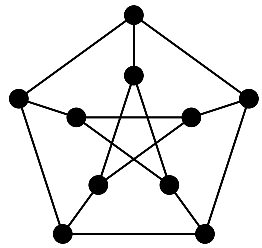
1. Mennyi a következő gráfok kromatikus száma:
   C_4, C_5, $K_{2,4}$, alábbi 2 gráf



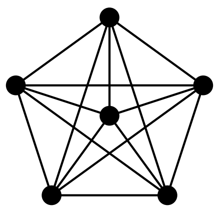


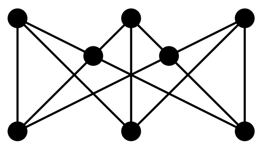
2. Mennyi a következő két gráf élkromatikus száma?





3. Legyen G 100-reguláris gráf 2001 ponton. Határozzuk meg $\chi_e(G)$ értékét!
4. Mycielski-konstrukciót használva rajzoljunk olyan M_k gráfokat, ahol $\omega(M_k) = 2$, $\chi(M_k) = k$, $k = \{2, 3, 4\}$! De tényleg, a szabályt használva, gyakorlás miatt!
5. Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?





6. Hány csúcsa van egy összefüggő, 4-reguláris síkgráfnak, ha síkbarajzolásakor 10 tartomány keletkezik?
7. Mutassuk meg, hogy egy síkbarajzolható egyszerű gráfban nem lehet minden pont foka legalább 6!

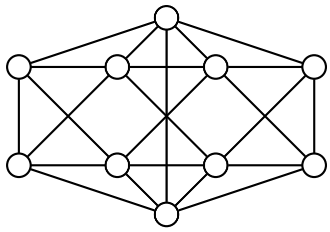
---

8. G csúcsai egy sakktábla mezői. Két mező szomszédos G-ben, ha egymásból bástyával egy lépésben elérhetők. Mennyi G kromatikus száma?
9. **[ppZH 2012. december 12.]** Legyenek a G_n egyszerű gráf csúcsai az (i, j) számpárok, ahol i és j 1 és n közötti egészek. A G_n gráf (i, j) és (k, l) egymástól különböző csúcsai pontosan akkor szomszédosak, ha $i = k$ vagy $j = l$. Rajzoljuk le G_3 egy áttekinthető diagramját, valamint határozzuk meg G_3 kromatikus számát, $\chi(G_3)$-t.
10. **[pZH 2008. december 5.]** Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges 3-kromatikus, 100 csúcsú G gráfnak van 67 olyan csúcsa, amik páros gráfot feszítenek.

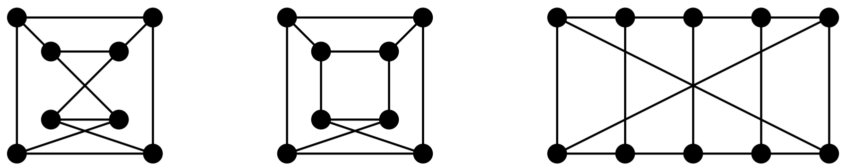
11. **[pZH 2011. december 1.]** Tegyük fel, hogy 77 iskolás levelez egymással úgy, hogy mindegyiküknek pontosan 8 levelezőpartnere van. Megvalósítható-e, hogy a levelezéshez 8-féle színű borítékot használnak úgy, hogy mindenki különböző színű borítékot használjon az egyes levelezőpartnereihez, és bármely két levelezőtárs között mindkét irányú levélforgalomhoz azonos színű borítékot használjanak?

12. **[ZH 2009. november 23.]** A G gráfot úgy kaptuk, hogy a 6 pontú teljes gráfból elhagytunk három független (vagyis pontdiszjunkt) élt. Síkbarajzolható-e ez a G gráf? *(Ha igen, rajzoljuk le keresztezés nélkül, csupa egyenes szakasszal, ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be!)*

13. **[pZH 2011. december 1.]** Síkbarajzolható-e az ábrán látható gráf?



14. Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?



15. Egy nemzetközi konferencián 5 ország egy-egy képviselője ül asztalhoz. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, akiknek az országa nem szomszédos! (Feltételezhetjük, hogy a világ nem tórusz alakú, valamint nincsenek exklávék.)

16. **[ZH 2011. november 24.]** Tegyük fel, hogy G olyan gráf, amire $\Delta(G) \leq 3$ és G-nek legfeljebb 5 harmadfokú csúcsa van. Bizonyítsuk be, hogy G síkbarajzolható.

17. **[ppZH 2011. december 14.]** Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 11 csúcsa van és síkbarajzolható. Igazoljuk, hogy a $\bar{G}$ komplementergráf nem síkbarajzolható.

18. Jelölje M_k a Mycielski-konstrukcióval kapott azon gráfot, melynek kromatikus száma k. Milyen k értékekre tartalmaz M_k Euler-kört?

19. Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan $\chi(G)$ színnel való színezése, melyben az egyik színosztály pontosan $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?

20. Legyen G egy egyszerű gráf, amire $\chi(G) = k$. Tekintsük G-nek egy k színnel való színezését, ebben legyen az egyik felhasznált szín a piros. Bizonyítsuk be, hogy a megadott színezésben biztosan van olyan piros színű pont, aminek szomszédságában az összes felhasznált, pirostól különböző szín előfordul!

21. Legyen G egy 3-reguláris gráf, amire $\chi_e(G) = 3$. Tudjuk továbbá, hogy G éleinek (a színek egymás közötti permutációjától eltekintve) egyetlen jó három színnel való színezése létezik. Van-e G-ben Hamilton-kör?

22. Legyen G olyan (irányítatlan) gráf, melynek kromatikus száma k. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon!

23. Bizonyítsuk be, hogy egy n csúcsú, e élű reguláris G gráfra fennáll, hogy $\chi(G) \leq 1+2e/n$!