Bevezetés a számításelméletbe II.

2010. Április 26.

10. gyakorlat: Számelmélet, csoportelmélet

1. Oldjuk meg a $6x \equiv 14$ $(mod\ 26)$ kongruenciát különböző módokon!
2. Hány megoldása van a $6x \equiv 15$ $(mod\ m)$ kongruenciának, ha $m = 10, 18, 21$?
3. Oldjuk meg minél egyszerűbben az alábbi kongruenciákat:
   (a) $202x \equiv 157 \pmod{203}$,
   (b) $309x \equiv 451 \pmod{617}$,
   (c) $5x \equiv 561 \pmod{1968}$,
   (d) $105x \equiv 761 \pmod{809}$,
4. Csoportot alkotnak-e az alábbi halmazon definiált műveletek? Ha igen, akkor vizsgáljuk meg, hogy a csoport kommutatív-e?
   (a) {egész számok, összeadás},
   (b) {páratlan számok, összeadás},
   (c) {páros számok, összeadás},
   (d) {2×2-es mátrixok, mátrixszorzás},
   (e) a síkvektorok halmaza; a síkvektorok összeadása.
   (f) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok uniója.
   (g) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok szimmetrikus differenciája. (Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája alatt definíció szerint az $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmazt értjük.)
5. Csoportot illetve félcsoportot alkot-e az alábbi H halmaz a $*$ művelettel?
   (a) H az egész számok halmaza és az a, $b \in H$ számokra $a * b = a + b + 1$, ahol a szokásos összeadás szerepel;
   (b) Legyen m egy rögzített szám és $H = \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Továbbá $a * b = ab \pmod{m}$;
   (c) H a valós számok halmaza és $a * b = a + b + ab$;
   (d) H a 2002 pozitív osztóinak halmaza és az $a, b \in H$ számokra $a * b = (a, b)$, azaz a és b legnagyobb közös osztója.
6. Bizonyítsuk be, hogy minden csoportban $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
   Igaz-e, mindig, hogy $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$?
7. Bizonyítsd be, hogy ha G csoportban teljesül, hogy $a^2 = 1 \quad \forall a \in G$-re $\Longrightarrow G$ Abel-csoport!
8. A G véges Abel-csoport összes elemét összeszorozzuk valamilyen sorrendben. Bizonyítsd be, hogy eredményül G-nek olyan elemét kapjuk, amelynek az inverze önmaga!