

## Bevezetés a számításelméletbe II.

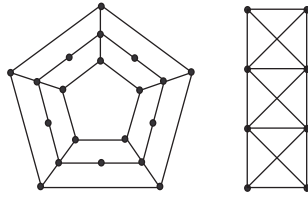
2010. ÁPRILIS 12.

8. gyakorlat: Összefüggőség, Menger-tételek, Számelmélet

1. Hányszorosan pont- illetve élösszefüggőek az alábbi gráfok:

- (a) (b) Petersen-gráf
- (c) végtelen négyzetrács
- (d)  $n$  hosszú kör
- (e)  $K_{n,n}$

2. Hányszorosan összefüggőek az alábbi gráfok?



3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy  $2n$  pontú egyszerű  $G$  gráf  $n$ -szeresen élösszefüggő, akkor kétszeresen pontösszefüggő is!
4. A  $G(V, E)$  összefüggő gráfban minden  $v \in V$  ponthoz és  $e \in E$  élhez van olyan kör, amely  $v$ -n is és  $e$ -n is átmegy. Mutassuk meg, hogy a  $G$  gráf kétszeresen összefüggő!
5. Legyen  $A$  és  $B$  a  $G$  gráf csúcsai halmazának két diszjunkt, egyenként legalább  $k$  elemű részhalmaza. Tegyük fel, hogy bárhogyan hagyunk el  $G$ -ből  $k$ -nál kevesebb pontot, a maradék gráfban van olyan út, amely  $A$  és  $B$ -beli pontokat köt össze. Bizonyítsd be, hogy ekkor létezik  $G$ -ben  $k$  darab (teljes egészében) pontdiszjunkt út úgy, hogy mindegyik  $A$  és  $B$ -beli pontokat köt össze!
6. Mutassuk meg, hogy a  $k$ -szoros pontösszefüggésből következik a  $k$ -szoros élösszefüggés, de ugyanez visszafelé már nem teljesül!
7. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris gráf pont- és élösszefüggőségi száma megegyezik! Mi van, ha a gráf 3- vagy 4-reguláris?
8. Bizonyítsuk be, hogy minden háromszorosan összefüggő gráfban van páros hosszúságú kör!
9. Legyen  $a = 50700$  és  $b = 111384$ . Végezzük el a két szám prímtényező felbontását, majd ezen kanonikus alakok segítségével számítsuk ki a legnagyobb közös osztót, a legkisebb közös többszöröst, és mondjuk meg azt is, hogy hány olyan szám van, amely osztója  $a$  és  $b$  közül legalább az egyiknek!
10. Egy perzsa sahnak 100 felesége van, a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A börtöncellák zárjai "kétállásúak": ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sahn születésnapján a 100 feleség végigvonul a börtönön és a zárral játszanak. Az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján egyet fordít, stb., a  $k$ -edik feleség minden  $k$ -edik ajtó zárján egyet fordít, egészen a 100. feleségig. Végül azok a rabok, akiknek az ajtaja nyitva van, kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban lagnak a szerencsések?
11. Legyen  $a$  és  $b$  két páratlan szám. Mennyi  $(a^2 + b^2, 4)$ ?
12. Bizonyítsuk be, hogy a páratlan négyzetszámok nem csak négygyel, de nyolccal osztva is 1 maradékot adnak!