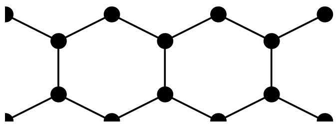
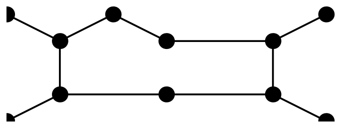
Bevezetés a számításelméletbe II.

2010. FEBRUÁR 15.

2. gyakorlat: Párosítások

1. Döntsük el az alábbi gráfokról, hogy párosak-e! Ha igen, osszuk szét a csúcsokat ,,fiúkra és lányokra", ha nem, bizonyítsuk be, hogy nem lehetséges a szétosztás!

a)  b) 

2. Igaz-e, hogy ha egy összefüggő páros gráfban van Hamilton-kör, akkor van teljes párosítás is? Igaz-e ennek megfordítása?

3. Bizonyítsd be, hogy egy reguláris páros gráfban mindig létezik teljes párosítás!

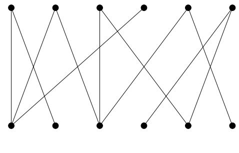
4. Lássuk be, hogy egy reguláris páros gráf élhalmaza partícionálható teljes párosításokra! (Tehát az élek kiszínezhetőek r db színnel úgy, hogy mindegyik egyszínű élhalmaz egy teljes párosítást adjon.)

5. Adott egy $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan k darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható n darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!

6. Egy kiránduláson a résztvevő n házaspár között akarunk szétosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább n fajtát szeret a csokoládék közül, és hogy minden csokoládét minden házaspárnak legalább az egyik tagja szereti. Bizonyítsuk be, hogy a csokoládék kioszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amilyet szeret.

7. Valaki véletlenszerűen szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy darab 2-es, egy darab 3-as, stb., egy darab A). (A francia kártyában 13 fajta figura van: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. Minden figurából 4 darab van egy pakliban.)

8. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a maximális párosítást!

(a)  (b)