

Bevezetés a számításelméletbe II.

2011. ÁPRILIS 11.

10. gyakorlat: Csoporthalmélet

1. Csoporthalméletben az alábbi halmazon definiált műveletek? Ha igen, akkor vizsgáljuk meg, hogy a csoport kommutatív-e?

- (a) $\{2 \times 2\text{-es mátrixok, mátrixszorzás}\}$,
- (b) a síkvektorok halmaza; a síkvektorok összeadása.
- (c) $\{\text{egész számok, összeadás}\}$,
- (d) $\{\text{páratlan számok, összeadás}\}$,
- (e) $\{\text{páros számok, összeadás}\}$,
- (f) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok uniója.
- (g) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok szimmetrikus differenciája. (Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája alatt definíció szerint az $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmazt értjük.)

2. Csoporthalméletben illetve félcsoporthalméletben alkot-e az alábbi H halmaz a $*$ művelettel?

- (a) H az egész számok halmaza és az $a, b \in H$ számokra $a * b = a + b + 1$, ahol a szokásos összeadás szerepel;
- (b) Legyen m egy rögzített szám és $H = \{1, 2, \dots, m - 1\}$. Továbbá $a * b = ab \pmod{m}$;
- (c) H a valós számok halmaza és $a * b = a + b + ab$;
- (d) H a 2002 pozitív osztóinak halmaza és az $a, b \in H$ számokra $a * b = (a, b)$, azaz a és b legnagyobb közös osztója.

3. Bizonyítsuk be, hogy minden csoportban $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

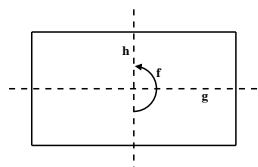
Igaz-e, mindig, hogy $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$?

4. Bizonyítsd be, hogy ha G csoportban teljesül, hogy $a^2 = 1 \quad \forall a \in G$ -re $\implies G$ Abel-csoport!

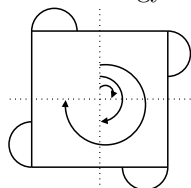
5. Legyen (G, \cdot) egy tetszőleges csoport. Tegyük fel, hogy a csoport valamely három $a, b, c \in G$ elemére $a \cdot b = c$, $b \cdot c = a$ és $c \cdot a = b$ teljesül. Határozzuk meg az $a \cdot c \cdot b$ szorzat értékét!

6. Írjuk fel az alábbi csoportok Cayley-táblázatát! Melyek izomorfak egymással?

- (a) $\{\text{mod } 4 \text{ maradékosztályok, összeadás}\}$
- (b) $\{\text{mod } 8 \text{ redukált maradékosztályok, szorzás}\}$
- (c) A téglalap szimmetriacsoportja:
(szimmetriacsoport = a rajzot önmagába vivő egybevágósági transzformációk halmaza a kompozícióra, mint műveletre nézve!)



- (d) A "füles négyzet" szimmetriacsoportja:



7. Mi az egyes elemek rendje C_{12} -ben (a 12 rendű ciklikus csoportban)?

8. Legyen a G csoport elemeinek halmaza $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a művelet a mod 7 szorzás. Igazoljuk, hogy a G csoport ciklikus!