

Bevezetés a számításelméletbe II.

2011. ÁPRILIS 4.

9. gyakorlat: Számelmélet

- Mennyi $\phi(9)$, $\phi(133)$, $\phi(540)$, $\phi(7!)$?
- Az Euler-féle ϕ függvény tulajdonságait felhasználva,
 - bizonyítsuk be, hogy $11 \mid n^{11} + 10n$,
 - igazoljuk, hogy ha n nem osztható 17-tel, akkor $n^8 + 1$ vagy $n^8 - 1$ biztosan osztható 17-tel,
 - számítsuk ki 108^{182} maradékát 19-cel osztva,
 - bizonyítsuk be, hogy $42 \mid n^7 - n$.
- Kiszámítandó $((43)^{43})^{43}$ modulo 49.
- Határozzuk meg az utolsó
 - három számjegyet 403^{402} -nek,
 - számjegyet $7^{6^{5^4 3^2}}$ -nek!
- Milyen maradékot ad a 36 legkisebb 23-mal osztható pozitív egész szám szorzata 37-tel osztva?
- Legyen $n = 201004041201$. Határozzuk meg n^n utolsó 3 számjegyet!
- Csoportot alkotnak-e az alábbi halmazon definiált műveletek? Ha igen, akkor vizsgáljuk meg, hogy a csoport kommutatív-e?
 - {egész számok, összeadás},
 - {páratlan számok, összeadás},
 - {páros számok, összeadás},
 - { 2×2 -es mátrixok, mátrixszorzás},
 - a síkvektorok halmaza; a síkvektorok összeadása.
 - egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok uniója.
 - egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok szimmetrikus differenciája. (Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája alatt definíció szerint az $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmazt értjük.)
- Csoportot illetve félcsoportot alkot-e az alábbi H halmaz a $*$ művelettel?
 - H az egész számok halmaza és az $a, b \in H$ számokra $a * b = a + b + 1$, ahol a szokásos összeadás szerepel;
 - Legyen m egy rögzített szám és $H = \{1, 2, \dots, m - 1\}$. Továbbá $a * b = ab \pmod{m}$;
 - H a valós számok halmaza és $a * b = a + b + ab$;
 - H a 2002 pozitív osztóinak halmaza és az $a, b \in H$ számokra $a * b = (a, b)$, azaz a és b legnagyobb közös osztója.