

Bevezetés a számításelméletbe II.

2011. MÁRCIUS 21.

7. gyakorlat: Gráfok mátrixai, Számelmélet

1. Legyen A egy egyszerű, irányítatlan gráf szomszédossági mátrixa. Mutassuk meg, hogy ha az A^2 mátrix főátlóbeli elemeit összeadjuk, akkor páros számot kapunk!
2. Legyen $a = 50700$ és $b = 111384$. Végezzük el a két szám prímtényezős felbontását, majd ezen kanonikus alakok segítségével számítsuk ki a legnagyobb közös osztót, a legkisebb közös többszöröst, és mondjuk meg azt is, hogy hány olyan szám van, amely osztója a és b közül legalább az egyiknek!
3. Bizonyítsuk be, hogy a páratlan négyzetszámok
 - (a) négyvel osztva 1 maradékot adnak!
 - (b) nyolccal osztva 1 maradékot adnak!
4. (a) Egy perzsa sahnak 100 felesége van, a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A börtöncellák zárjai "kétállásúak": ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sahn születésnapján a 100 feleség végigvonul a börtönön és a zárossal játszanak. Az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján egyet fordít, stb., a k -edik feleség minden k -edik ajtó zárján egyet fordít, egészen a 100. feleségig. Végül azok a rabok, akiknek az ajtaja nyitva van, kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban laknak a szerencsések?
 - (b) A sahn következő születésnapján a feleségek megint rosszkednek. Most az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján kettőt fordít, stb., a k -edik feleség minden k -edik ajtó zárján k -t fordít, egészen a 100. feleségig. Most milyen sorszámú cellák lakói szabadulnak?
5. Melyek azok a pozitív p prímszámok, melyre
 - (a) $p + 10$ és $p + 14$ is prím,
 - (b) $p^2 + 2$ is prím,
 - (c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ is prím?
6. Bizonyítsd be, hogy a szomszédos *Fibonacci-számok* relatív prímelek! De vajon mennyi a másodsomszédos Fibonacci-számok legnagyobb közös osztója?
7. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egészt, amelyekre teljesül, hogy a (pozitív) osztóik száma 8, és a (pozitív) osztóik összege páratlan szám!