

2. gyakorlat

Vektorterek: altér, függetlenség, generálás, bázis, dimenzió

1. Döntsd el, hogy az \mathbb{R}^4 vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok!

$$(a) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3 = 0 \right\}; \quad (b) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2 = 1 \right\}. \quad (c) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0 \right\}.$$

2. Legyen a szokásos 3 dimenziós térben (\mathbb{R}^3 -ben) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak-e! (a) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független. (b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ lineárisan független.

3. Döntsd el, hogy az alábbi állítások igazak-e a 2. feladatban bevezetett \mathbb{R}^3 -beli vektorokra!

- (a) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ (b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ generátorrendszere \mathbb{R}^3 -nek.
(c) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ bázis. (d) $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan független.
(e) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ generátorrendszere \mathbb{R}^3 -nek.

4. Tegyük fel, hogy egy (tetszőleges) V vektortér $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ és \underline{d} elemeire $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d} = \underline{0}$. Melyek igazak mindig az alábbi állítások közül? (a) $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$; (b) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$; (c) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$.

5. Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független (egy tetszőleges vektortérben). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} + \underline{c}$, $\underline{b} + \underline{c}$ vektorrendszer is lineárisan független!

6. Legyenek $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egy vektortér olyan vektorai, melyekre $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b} + \underline{c}$, $\underline{c} + \underline{a}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$?

7. Adjuk meg \mathbb{R}^3 (a háromdimenziós valós tér) alábbi alterének egy bázisát:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x + 2y + z = 0 \right\}$$

8. Bizonyítsuk be, hogy ha a V vektortérben az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ egy lineárisan független rendszer és $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_{k+1}$ pedig egy generátorrendszer, akkor a két vektorrendszer közül pontosan az egyik bázist alkot V -ben.

9. Tudjuk, hogy $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{c}, \underline{d}, \underline{e} \rangle$. Lineárisan függetlenek-e az $\underline{a}, \underline{c}, \underline{e}$ vektorok?

10. Bizonyítsuk be, hogy egy 99 dimenziós vektortér két, 50 dimenziós alterének mindig van a nullvektortól különböző közös eleme.

GY. Legyen \mathbb{R}^4 -ben

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak-e!

- (a) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ (b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ generátorrendszer
(c) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan független (d) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ bázis
(e) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független (f) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ bázis