5. a)
A 0 mátrix determinánsa 0. Így A^k = 0 miatt det(A^k) = 0. A determinánsok szorzási szabályát felhasználval: (det(A*B = det(A)*det(B))
det(A^k) = det(A)^k , amiről pedig láttuk hogy 0. Ez csak úgy lehet, ha det(A) = 0, tehát az állítás igaz.
b)
például A =
1 0
0 0
Mátrix determinánsa 0, viszont könnyen ellenőrizhető, hogy A^k = A minden k ra, tehát az állítás nem igaz.

6.
Egy négyzetes mátrix oszlopai pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha determinánsa nem 0. (lásd előadás). Tehát det(A) != 0, det(B) ! = 0.
Az A*B mátrix determinánsa a szorzási szabály szerint det(A)*det(B), ami szintén nem lehet 0, ha két 0 tól különböző szám szorzataként kapjuk. Ha pedig a determináns nem 0, akkor az oszlopai lineárisan függetlenek.

7.
A mátrix inverze pontosan akkor létezik, ha a determináns nem 0. A 1. és 4. sora jól láthatóan egymás 4 szerese, így már ez a 2 sor lineárisan összefüggő, azaz a determináns 0. -> nem létezik az inverz.
A ZH feladaton valójában ez a mátrix szerepelt A =
1 1 1 1
2 0 2 2
3 3 0 3
4 4 4 0
Ekkor gauss eliminációval meghatározható az inverz. (ha nem létezik az kiderül az elimináció során…):

1 1 1 1 | 1 0 0 0
2 0 2 2 | 0 1 0 0
3 3 0 3 | 0 0 1 0
4 4 4 0 | 0 0 0 1

Vonjuk ki az 1. sort 2* a 2. ból, 3* a 3. ból, 4* a 4. ből:

1	1	1	1	1	0	0	0
0	-2	0	0	-2	1	0	0
0	0	-3	0	-3	0	1	0
0	0	0	-4	-4	0	0	1

Osszuk le a 2,3,4. sort rendre -2, -3, -4 – el:

1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	-½	0	0
0	0	1	0	1	0	-1/3	0
0	0	0	1	1	0	0	-¼

Vonjuk ki a 2.3.4. sorokat az 1. ből:

1	1	1	1	**1**	**½**	**1/3**	**¼**
0	1	0	0	**1**	**-½**	**0**	**0**
0	0	1	0	**1**	**0**	**-1/3**	**0**
0	0	0	1	**1**	**0**	**0**	**-¼**

A vastagított mátrix az eredeti inverze!

8.
Ha det(A) != 0, és det(B) != 0, akkor det(A*B) = det(A) * det(B) != 0 szintén igaz. Tehát az AB mátrixnak létezik inverze.
Jelöljük ezt az inverzet X el, ekkor:
(A*B)*X = E // ahol E az egységmátrix.
Mátrixok a szorzára asszociatívak (lásd előadás), tehát (A*B)*X = A*(B*X).
Ekkor szorozhatjuk mindkét oldalt A^-1 (A inverzzel), balról!! (fontos, hogy a mátrix szorzás nem komutatív, nem mindegy merről szorozgatunk….):
A^-1 *A *(B* X) = A^-1 * E, azaz:
B*X = A^-1.
Most szorozva balról B^-1 el, megkapjuk X et:
B^-1 * B * X (= X) = B^-1 *A^-1.

9.
Ha det(A) != 0 ismert volna, akkor szorozva balról A inverzzel kapnánk, hogy B=C, viszont ha csak A = 0 mátrix van kizárva, tehát még jó sok olyan mátrix szóbajön, ahol det(A) = 0.
Próbáljunk meg tehát ellenpéldát keresni. 1 ellenpélda:
A =
1 0
0 0
B =
0 0
0 1
C =
0 0
0 2
Ekkor A !=0, AB = AC, de B != C.

11. (nem beszéltük meg, de a megoldás azoknak akiket érdekel:)
Disztributivitást használva az egyenlet így is írható: A* (A+E) = -E, ahonnan a szorzási szabályból következik, hogy det(A) !=0.

A^2 + A + E = 0, szorozzunk A val mindkét oldalt (mondjuk balról), és használjuk a disztributivitást:
A^3 + A^2 + A = 0 adódik
Az első egyenletből látszik, hogy A^2 + A = -E, ezt beírva az utóbbiba:
A^3 = E adódik.
Szorozzunk ismét A val:
A^4 + A^3 + A^2 =0
A 2. és 3. egyenletből:
A^4 = A adódik.
A^5 + A^4 + A^3 = 0 -> előző egyenlettel együtt: A^5 = A^2 .
Látjuk tehát, hogy a módszerrel azt kapjuk, hogy A^k = A^(k-3).
Így tehát A^2004 = A^2001 = … A^3 = E.

Az óra végén még a tavalyi ZH feladatsort osztottam ki, amit megtalálhattok a tárgy honlapján is. (Az 1. feladat olyanra épít, ami idén még nem szerepelt, tehát azt nem kell néznetek most.)