Bevezetés a számításelméletbe I.
2009. október 15.

5. gyakorlat
Kifejtési tétel, Mátrixok szorzása, inverz

1. Számold ki a *kifejtési tétel felhasználásával* az alábbi determinánsok értékét!

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2. Egy $n \times n$-es A mátrix minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével. Mi lesz az így kapott n^2 darab szorzat összege?

3. A (10×20)-as A mátrixra teljesül, hogy minden sorában az elemek összege 1. A (20×30)-as B mátrix minden eleme 2. Határozzuk meg az $A \cdot B$ szorzatot!

4. Számold ki az alábbi mátrixokat!

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2008}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2007}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n}$

5. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges A négyzetes mátrixra! (0-val jelöltük a csupa nulla mátrixot.)
(a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$, akkor $\det A = 0$.
(b) Ha $\det A = 0$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$.

6. Legyenek $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \times n)$-es mátrixok. Bizonyítsd be, hogy ha A oszlopai lineárisan függetlenek és B oszlopai is lineárisan függetlenek, akkor az $A \cdot B$ mátrix oszlopai is lineárisan függetlenek!

7. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak, ha igen, akkor számítsuk ki A inverzét! (ZH 2008.10.21.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

8. Igaz-e, hogy ha az $n \times n$-es méretű A és B mátrixoknak létezik inverze, akkor AB-nek is létezik? Hogyan számítható ki a szóban forgó $(AB)^{-1}$ mátrix A^{-1} és B^{-1} segítségével?

9. Igaz-e, hogy ha A, B és C $n \times n$-es mátrixok, $A \neq 0$, valamint $AB = AC$, akkor $B = C$?

10. Határozd meg az összes olyan 2×2-es X mátrixot, amelynek minden eleme racionális szám és amelyre $X^{2009} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ teljesül.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha a négyzetes A mátrixra és a vele azonos rendű E egységmátrixra $A^2 + A + E = 0$, akkor A determinánsa nem 0. Számítsuk ki A^{2004}-t.