4. gyakorlat
Determináns

1. Számold ki *csak a definíció felhasználásával* az alábbi determináns értékét!

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 0 \end{vmatrix}$

2. Mennyi az $1, 2, \ldots, 101$ elemek $100, 101, 98, 99, 96, 97, \ldots, 2, 3, 1$ permutációjának inverziószáma?

3. Állapítsuk meg, hogy n-től függően mi lesz egy $n \times n$-es mátrix determinánsának felírásában a mellékátlóban álló elemek szorzatának előjele.

4. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét! (A (d) pontban a, b, c és d valós számokat jelölnek.)

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 6 & 12 & 20 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

5. Számold ki az alábbi determinánsokat!

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots & 2n \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \ldots & 3n \\ 4 & 8 & 12 & 16 & \ldots & 4n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 2n & 3n & 4n & \ldots & n^2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \ldots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$

6. A 101×101-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem

$$a_{ij} = \begin{cases} 3^{2004}\text{-nek a } (2i+j)\text{-edik számjegye}, & \text{ha } i \cdot j \text{ páros}, \\ 0, & \text{ha } i \cdot j \text{ páratlan}. \end{cases}$$

Határozzuk meg A determinánsát!

7. Számítsd ki az A mátrix determinánsát, ha $a_{i,j} = \min(i, j)$

8. Bizonyítsd be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1222 & 1492 & 1956 & 1789 \\ 1456 & 1000 & 1867 & 1686 \\ 1848 & 1945 & 1552 & 1640 \\ 1769 & 1514 & 1918 & 1812 \end{vmatrix} \neq 0$$

9. Egy $n \times n$-es mátrix minden eleme páros, és tudjuk, hogy a determinánsa osztható 64-el, de nem osztható 128-al. Mennyi lehet n ?

10. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

   a) Ha egy $n \times n$-es mátrixnak legalább $n^2 - n + 1$ eleme 0, akkor a mátrix determinánsa 0.
   b) Ha egy mátrix determinánsa 0, akkor a mátrixban előfordul a 0 elem.
   c) Ha egy $n \times n$-es mátrixban van egy $k \times l$-es csupa 0 téglalap, és $k + l > n$, akkor a determináns 0.

11. Az $n \times n$-es A mátrix minden eleme egy 3-mal osztva 1 maradékot adó egész szám. Bizonyítsuk be, hogy A determinánsa osztható (3^{n-1})-nel!