2. gyakorlat
Vektorterek: altér, függetlenség, generálás, bázis, dimenzió

1. Döntsd el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok!

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3 = 0 \right\}$; (b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2 = 1 \right\}$. (c) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0 \right\}$.

2. Legyen a szokásos 3 dimenziós térben ($\mathbb{R}^3$-ben) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak-e ! (a) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független. (b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ lineárisan független.

3. Döntsd el, hogy az alábbi állítások igazak-e a 2. feladatban bevezetett $\mathbb{R}^3$-beli vektorokra!
(a) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$
(b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ generátorrendszere $\mathbb{R}^3$-nek.
(c) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ bázis.
(d) $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan független.
(e) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ generátorrendszere $\mathbb{R}^3$-nek.

4. Tegyük fel, hogy egy (tetszőleges) V vektortér $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ elemeire $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d} = \underline{0}$. Melyek igazak mindig az alábbi állítások közül? (a) $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$; (b) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$; (c) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$.

5. Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független (egy tetszőleges vektortérben). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} + \underline{c}$, $\underline{b} + \underline{c}$ vektorrendszer is lineárisan független!

6. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy vektortér olyan vektorai, melyekre $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b} + \underline{c}$, $\underline{c} + \underline{a}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$?

7. Legyenek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ egy vektortér lineárisan független vektorai és legyen $\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{a}_i$. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{a}_1 \in \langle \underline{x}, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \rangle$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\lambda_1 \neq 0$!

8. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ (a háromdimenziós valós tér) alábbi alterének egy bázisát:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x + 2y + z = 0 \right\}$$

9. Bizonyítsuk be, hogy ha a V vektortérben az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ egy lineárisan független rendszer és $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{k+1}$ pedig egy generátorrendszer, akkor a két vektorrendszer közül pontosan az egyik bázist alkot V-ben.

10. Tudjuk, hogy $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{c}, \underline{d}, \underline{e} \rangle$. Lineárisan függetlenek-e az $\underline{a}, \underline{c}, \underline{e}$ vektorok?

11. Tegyük fel, hogy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 + \ldots + \underline{v}_{100} = \underline{0}$ és $\underline{v}_2 + \underline{v}_4 + \underline{v}_6 + \ldots + \underline{v}_{100} = \underline{0}$ teljesül a V vektortér $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektoraira. Jelöljük a $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100} \rangle$ generált alteret W-vel. Bizonyítsd be, hogy $\dim W \leq 98$.

12. Bizonyítsuk be, hogy egy 99 dimenziós vektortér két, 50 dimenziós alterének mindig van a nullvektortól különböző közös eleme.

GY. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak-e!
(a) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$
(b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ generátorrendszer
(c) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan független
(d) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ bázis
(e) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független
(f) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ bázis