Bevezetés a számításelméletbe I.
2009. szeptember 10.

1. gyakorlat
Koordinátageometria, vektorterek

1. Milyen hosszúságú a $(3, 4, 12)$ vektor?

2. Hol döfi a $3x + y + 5z = 4$ síkot az az egyenes, amelyet az $x + 4y = 1$ és az $x - 3y + z = 6$ egyenletek határoznak meg?

3. (a) Írd fel a $P(1, 4, -1)$ ponton átmenő és az $\frac{x-5}{2} = \frac{y-10}{-2} = \frac{z+8}{3}$ egyenletrendszerű egyenesre merőleges sík egyenletét!

   (b) Írd fel a $Q(2, -5, -2)$ ponton átmenő és a $z = 4x + 7$ egyenletű síkra merőleges egyenes egyenletrendszerét!

4. Határozzuk meg a három koordinátatengellyel vett metszéspontjait annak a síknak, mely átmegy a $(3, 4, 5)$ ponton és merőleges az origóból a $(3, 4, 5)$ koordinátájú pontba mutató vektorra!

5. Döntsd el, hogy a t paraméter milyen valós értékére

   (a) párhuzamos az $5x - 6y + 2z = 10$ egyenletű sík a $tx - 3y + z = 7$ egyenletű síkkal;

   (b) merőleges az $\frac{x-5}{2} = \frac{y+9}{-2} = \frac{z}{3}$ egyenletrendszerű egyenes a $8x + ty + 12z = 19$ egyenletű síkra;

   (c) metszi az $\frac{x-5}{2} = \frac{y+9}{-2} = \frac{z}{3}$ egyenletrendszerű egyenes a $8x + ty + 12z = 19$ egyenletű síkot.

6. Legyen $A = (1, 0, 0)$ és $B = (1, -2, 4)$, az e egyenes egyenlete pedig $(x - 1)/5 = (y + 2)/3 = z - 3$. Keressük meg az e egyenesen azon C pontot, melyre $|AC| = |BC|$ teljesül!

7. Vektorteret alkotnak-e az alábbi halmazok (a valós számok, mint skalárhalmaz felett)?

   (a) a sík összes, x vagy y tengellyel párhuzamos vektora,

   (b) az összes n-edfokú egyváltozós polinom,

   (c) az összes legfeljebb n-edfokú egyváltozós polinom,

   (d) az összes egyváltozós polinom.

8. Döntsük el, hogy az összes valós számon értelmezett valós értékű függvények alábbi részhalmazai vektorteret alkotnak-e a valós számok teste felett?

   (a) folytonos függvények

   (b) legfeljebb öt pontban szakadó függvények

   (c) páros függvények

   (d) $\{f | f(5) \leq 0\}$

   (e) $\{f | f(5) = f(8)\}$

9. Döntsd el, hogy az alábbiakban megadott V alaphalmaz a $\oplus$–vel jelölt vektorösszeadással és a $\odot$–vel jelölt skalárral való szorzással vektorteret alkot–e?

   (a) V a racionális számok halmaza; $\oplus$ a racionális számok összeadása; $\lambda \odot \underline{v} = [\lambda \cdot \underline{v}]$, ahol a $[\quad]$ egészrészt jelöl.

   (b) V a pozitív valós számok halmaza; $\underline{u} \oplus \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{v}$ (azaz a $\oplus$ a pozitív valós számok szorzása!); $\lambda \odot \underline{v} = \underline{v}^{\lambda}$.

10. Legyen V az egész számok halmaza. Jelölje $\oplus$ az egész számok összeadását és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár, valamint minden $\underline{v} \in V$ esetén legyen $\lambda \odot \underline{v} = \underline{v}$. Döntsd el, hogy a V halmaz a most definiált $\oplus$ és $\odot$ művelettel vektorteret alkot-e!