

13. gyakorlat Számosságok

1. Seholsincs országban létezik egy végtelen szálloda. A szálloda szobái egy szinten helyezkednek el, egymás mellett sorban. A szállodának van portása is, illetve minden szobában van egy hangosbemondó. Nyár van, a szálloda megtelt. Mit tegyen a portás, ha
 - (a) megérkezik a király, és el kell szállásolni őt?
 - (b) megérkezik a király a (megszámlálhatóan) végtelen seregével, és el kell szállásolni őket?
2. Seholsincs országban megépítették a végtelen emeletes szállodát. Az új szállodának végtelen sok emelete van, minden emeleten végtelen sok szobával. Az érdeklődés továbbra is óriási, a szálloda újból megtelt. Ámde a szálloda nem bírja az óriási terhelést, össze fog dőlni. A vendégeket át kellene költöztetni a régi, egyszintes végtelen szállodába. Meg tudjuk-e ezt tenni?
3. Mi a számossága az alábbi halmazoknak?
 - (a) azon síkvektorok halmaza, amelyeknek mindkét koordinátája pozitív egész szám;
 - (b) azon térbeli vektorok halmaza, amelyeknek mindhárom koordinátája egész szám;
 - (c) azon \mathbb{R}^5 -beli vektorok halmaza, amelyeknek mind az öt koordinátája racionális szám;
4. Bizonyítsuk be, hogy
 - (a) a sík pontjainak számossága megegyezik az egységnégyzet belső pontjainak számosságával.
 - (b) az egységnégyzet belső pontjainak számossága megegyezik a $(0, 1)$ intervallum számosságával.
 - (c) Mit láttunk be a sík pontjainak számosságáról?
5. Adjuk meg a következő halmazok számosságát:
 - (a) A természetes számok véges részhalmazai.
 - (b) Azok az $1, a_1, a_2, \dots$ sorozatok, melyekben a szomszédos elemek hányadosa $1/2$ vagy 2 .
 - (c) Azok az x -ből és y -ből álló sorozatok, melyekben csak véges sok y fordul elő.
 - (d) Azon síkbeli háromszögek, melyeknek minden koordinátája egész szám.
6. Bizonyítsuk be, hogy az irracionális számok számossága nem egyezik meg a természetes számok számosságával.
7. Hány olyan (x, y) pontpár van a síkon, melyre
 - a) x és y is racionális,
 - b) x és $x + y$ is racionális,
 - c) x és xy is racionális,
 - d) $x + y$ és xy is racionális?