7. gyakorlat
Mátrixok szorzása, Műveletek mátrixokkal

1. Számold ki az alábbi mátrixokat!

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2011}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2011}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n}$

2. A (10×20)-as A mátrixra teljesül, hogy minden sorában az elemek összege 1. A (20×30)-as B mátrix minden eleme 2. Határozzuk meg az $A \cdot B$ szorzatot!

3. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges A négyzetes mátrixra! (0-val jelöltük a csupa nulla mátrixot.)
   (a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$, akkor $\det A = 0$.
   (b) Ha $\det A = 0$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$.

4. Legyen A $n \times n$-es mátrix, $x, y \in \mathbb{R}^n$ pedig n magas oszlopvektorok. Bizonyítsd be, hogy ha $x \neq y$, de $Ax = Ay$ akkor $\det A = 0$.

5. Határozd meg az összes olyan 2×2-es X mátrixot, amelynek minden eleme racionális szám és amelyre $X^{2010} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ teljesül.

6. Legyen A olyan $n \times n$-es mátrix, melyre $A = A^T$ és A^2 főátlójában csak nullák állnak. Igazoljuk, hogy A a nulla mátrix (minden eleme 0).

7. Az $n \times n$-es A és B mátrixokra $AB = A$ és $BA = B$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A^2 = A$ és $B^2 = B$.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha a négyzetes A mátrixra és a vele azonos rendű E egységmátrixra $A^2 + A + E = 0$, akkor A determinánsa nem 0. Számítsuk ki A^{2011}-t.

9. Igaz-e, hogy ha A, B és C $n \times n$-es mátrixok, $A \neq 0$, valamint $AB = AC$, akkor $B = C$?

Sz. Van egy $n \times n$-es mátrixunk, melynek az elemei egy kivételével rögzítettek. Igaz-e, hogy a hiányzó elem mindig megválasztható úgy, hogy az így kitöltött mátrix determinánsa 0 legyen?