

## 5. gyakorlat Determináns

1. Számold ki *csak a definíció felhasználásával* az alábbi determináns értékét!

$$(a) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 0 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Mennyi az  $1, 2, \dots, 101$  elemek  $100, 101, 98, 99, 96, 97, \dots, 2, 3, 1$  permutációjának inverziószáma?

3. Állapítsuk meg, hogy  $n$ -től függően mi lesz egy  $n \times n$ -es mátrix determinánsának felírásában a mellékátlóban álló elemek szorzatának előjele.

4. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét!

$$(a) \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 6 & 12 & 20 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5. Számold ki az alábbi determinánsokat!

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \dots & 3n \\ 4 & 8 & 12 & 16 & \dots & 4n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 2n & 3n & 4n & \dots & n^2 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

6. A  $101 \times 101$ -es  $A$  mátrixban az  $i$ -edik sor és a  $j$ -edik oszlop kereszteződésében álló elem

$$a_{ij} = \begin{cases} 3^{2004}\text{-nek a } (2i + j)\text{-edik számjegye,} & \text{ha } i \cdot j \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } i \cdot j \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Határozzuk meg  $A$  determinánsát!

7. Számítsd ki az  $A$  mátrix determinánsát, ha  $a_{i,j} = \min(i, j)$

8. Bizonyítsd be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1222 & 1492 & 1956 & 1789 \\ 1456 & 1000 & 1867 & 1686 \\ 1848 & 1945 & 1552 & 1640 \\ 1769 & 1514 & 1918 & 1812 \end{vmatrix} \neq 0$$

9. Egy  $n \times n$ -es mátrix minden eleme páros, és tudjuk, hogy a determinánsa osztható 64-el, de nem osztható 128-al. Mennyi lehet  $n$ ?

10. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

- a) Ha egy  $n \times n$ -es mátrixnak legalább  $n^2 - n + 1$  eleme 0, akkor a mátrix determinánsa 0.
- b) Ha egy mátrix determinánsa 0, akkor a mátrixban előfordul a 0 elem.

Sz Az  $n \times n$ -es  $A$  mátrix minden eleme egy 3-mal osztva 1 maradékot adó egész szám. Bizonyítsuk be, hogy  $A$  determinánsa osztható  $(3^{n-1})$ -nel!