3. gyakorlat
Lineáris függetlenség, bázis, dimenzió

1. Írd fel az alábbi térbeli vektorok által generált altér egyenletét/egyenletrendszerét!

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

2. Tegyük fel, hogy egy (tetszőleges) V vektortér $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ elemeire $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}=\underline{0}$. Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül!
(i) Az állítás biztosan igaz.
(ii) Az állítás biztosan hamis.
(iii) Az állítás lehet igaz is és hamis is.
(a) $\langle \underline{a}, \underline{b}\rangle = \langle \underline{a}, \underline{c}\rangle$; (b) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\rangle = \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d}\rangle$; (c) $\underline{a} \in \langle \underline{b}, \underline{c}\rangle$; (d) $\underline{a} \notin \langle \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\rangle$;

3. Legyen a szokásos 3 dimenziós térben ($\mathbb{R}^3$-ben) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak-e ! (a) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független. (b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ lineárisan független.

4. Döntsd el, hogy az alábbi állítások igazak-e a 3. feladatban bevezetett $\mathbb{R}^3$-beli vektorokra!
(a) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\rangle$
(b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ generátorrendszere $\mathbb{R}^3$-nek.
(c) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ bázis.
(d) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ generátorrendszere $\mathbb{R}^3$-nek.

5. Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független (egy tetszőleges vektortérben). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{a}+\underline{c}$, $\underline{b}+\underline{c}$ vektorrendszer is lineárisan független!

6. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy vektortér olyan vektorai, melyekre $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{c}+\underline{a}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$?

7. Legyenek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ egy vektortér lineárisan független vektorai és legyen $\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{a}_i$. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{a}_1 \in \langle \underline{x}, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k\rangle$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\lambda_1 \neq 0$!

8. Bizonyítsuk be, hogy ha a V vektortérben az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ egy lineárisan független rendszer és $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{k+1}$ pedig egy generátorrendszer, akkor a két vektorrendszer közül pontosan az egyik bázist alkot V-ben.

9. Tudjuk, hogy $\langle \underline{a}, \underline{b}\rangle = \langle \underline{c}, \underline{d}, \underline{e}\rangle$. Lineárisan függetlenek-e az $\underline{a}, \underline{c}, \underline{e}$ vektorok?

10. Tegyük fel, hogy $\underline{v}_1+\underline{v}_2+\underline{v}_3+\ldots+\underline{v}_{100}=\underline{0}$ és $\underline{v}_2+\underline{v}_4+\underline{v}_6+\ldots+\underline{v}_{100}=\underline{0}$ teljesül a V vektortér $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektoraira. Jelöljük a $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}\rangle$ generált alteret W-vel. Bizonyítsd be, hogy $\dim W \leq 98$.