Bevezetés a számításelméletbe I.
2011. szeptember 12.

2. gyakorlat
Vektortér, altér, generátorrendszer

1. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben

$$\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ \underline{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \underline{c}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix},\ \underline{d}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\1\end{pmatrix}\text{ és }\underline{e}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

   (a) Kifejezhető-e $\underline{d}$ az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok segítségével?
   (b) Kifejezhető-e $\underline{e}$ az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok segítségével?
   (c) Milyen vektorok fejezhetők ki az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok segítségével?
   (d) Milyen vektorok fejezhetők ki az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{e}$ vektorok segítségével?

2. Legyen a szokásos 3 dimenziós térben ($\mathbb{R}^3$-ben) $\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\underline{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ és $\underline{d}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$.

   (a) Kifejezhető-e tetszőleges térbeli vektor az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok segítségével?
   (b) Kifejezhető-e tetszőleges térbeli vektor az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{d}$ vektorok segítségével?

3. Döntsd el, hogy az alábbiakban megadott V alaphalmaz a $\oplus$–vel jelölt vektorösszeadással és a $\odot$–vel jelölt skalárral való szorzással vektorteret alkot–e?

   (a) V a pozitív valós számok halmaza; $\underline{u}\oplus\underline{v}=\underline{u}\cdot\underline{v}$ (azaz a $\oplus$ a pozitív valós számok szorzása!); $\lambda\odot\underline{v}=\underline{v}^\lambda$.
   (b) V a racionális számok halmaza; $\oplus$ a racionális számok összeadása; $\lambda\odot\underline{v}=[\lambda\cdot\underline{v}]$, ahol a [ ] egészrészt jelöl.

4. Vektorteret alkotnak-e az alábbi halmazok a szokásos műveletekkel (a valós számok, mint skalárhalmaz felett)?

   (a) a sík összes, x vagy y tengellyel párhuzamos vektora,
   (b) az összes n-edfokú egyváltozós polinom,
   (c) az összes legfeljebb n-edfokú egyváltozós polinom,

5. Döntsd el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok!

(a) $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} : x_3=0\right\}$; (b) $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} : x_2=1\right\}$. (c) $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} : x_1+x_2+x_3+x_4\geq 0\right\}$.

6. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ (a háromdimenziós valós tér) alábbi alterének egy generátorrendszerét:

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : 3x+2y+z=0\right\}$$

7. Írd fel az alábbi térbeli vektorok által generált altér egyenletét/egyenletrendszerét!

(a) $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}2\\-8\\10\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\-12\\15\end{pmatrix}$

8. Tegyük fel, hogy egy (tetszőleges) V vektortér $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ elemeire $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}=\underline{0}$. Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül!
(i) Az állítás biztosan igaz.
(ii) Az állítás biztosan hamis.
(iii) Az állítás lehet igaz is és hamis is.
(a) $\langle\underline{a},\underline{b}\rangle=\langle\underline{a},\underline{c}\rangle$; (b) $\langle\underline{a},\underline{b},\underline{c}\rangle=\langle\underline{a},\underline{c},\underline{d}\rangle$; (c) $\underline{a}\in\langle\underline{b},\underline{c}\rangle$; (d) $\underline{a}\notin\langle\underline{b},\underline{c},\underline{d}\rangle$;