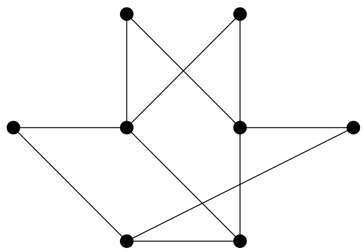
2. gyakorlat
Páros gráf, gráfok csúcsainak színezése

1. Páros gráf-e a 6, illetve 5 hosszúságú kör? És egy tetszőleges fa?

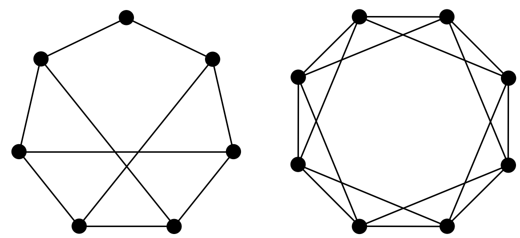
2. Jelentse G_k a Mycielski konstrukcióval kapott azon gráfot, melynek kromatikus száma k. Adjuk meg az összes olyan k értéket, melyre G_k tartalmaz Euler-kört!

---

3. Páros gráf-e az alábbi gráf?



4. Határozd meg az alábbi gráfok kromatikus számát!



5. Egy gráf csúcsai legyenek az 1 és 2007 közé eső természetes számok. Két csúcsot akkor kössünk össze, ha a különbségük legfeljebb 9. Mennyi a gráf kromatikus száma?

6. A G egyszerű gráfban 2007 darab kivételes ponttól eltekintve minden pont foka legföljebb 2006. Bizonyítsd be, hogy $\chi(G) \leq 2007$.

7. Tegyük fel, hogy G egy 2006 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf. Bizonyítsuk be, hogy a G gráf komplementerének kromatikus számára $\chi(\overline{G}) \geq 400$ áll. (ZH, 2006. március 30.)

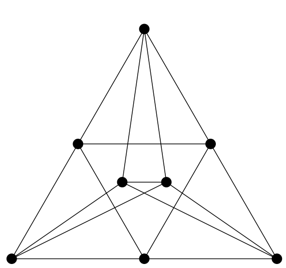
---

8. A G gráf csúcsai legyenek az u_1, $u_2, \ldots$, u_{2003}, v_1, $v_2 \ldots$, v_{2004} pontok. G feszített részgráfja az u_i pontokon egy 2003, a v_i pontokon pedig egy 2004 hosszúságú kör. Ezen kívül u_i és v_j össze van kötve egymással minden lehetséges i, j értékpár esetén. Mennyi a G gráf kromatikus száma? (ZH, 2004. március 25.)

9. Legyenek G csúcsai a sakktábla mezői, és két csúcs pontosan akkor legyen összekötve, ha a megfelelő mezők bástyával egy lépésben elérhetők egymásból. Mennyi az így keletkezett gráf kromatikus száma?

10. (a) Tegyük fel, hogy a G gráfot megszíneztük $\chi(G)$ színnel; legyen ezek közül a színek közül kettő a piros és a kék. Bizonyítsd be, hogy ekkor található a gráfban két szomszédos csúcs, amelyek közül az egyik piros, a másik kék.
(b) Bizonyítsd be, hogy e élű G gráfra $e \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

11. Határozzuk meg az ábrán látható G gráf kromatikus számát, $\chi(G)$-t! (ZH, 2005. március 31.)



12. (a) Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek pontjai számozhatóak úgy, hogy minden pont legfeljebb kettő nála nagyobb sorszámúval szomszédos. Igazoljuk, hogy $\chi(G) \leq 3$. (ZH, 2001. május 27.)
(b) Adott a síkban néhány egyenes úgy, hogy semelyik három nem megy át egy ponton. Legyen G az ezek által meghatározott gráf: G csúcsai az egyenesek metszéspontjai, két csúcs pedig akkor szomszédos, ha az egyik egyenesen szomszédos metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.