

9. gyakorlat  
Komplex számok, leszámlálás

1. Végezd el az alábbi műveleteket!

(a)  $(4 + i)(5 - 2i) + (4i - 1)^2$

(c)  $\left| \frac{6 + 3i}{6 - 3i} \right|$

(e)  $\sqrt[5]{1}$

(f)  $i^{18}$

(b)  $\frac{4 + i}{5 - 2i}$

(d)  $\frac{(1 + i)^8}{(1 - i)^7}$

(g)  $(i - 1)^{50}$

(h)  $\sqrt{i}$

2. (a) A biciklis klub tagjai négyjegyű tagsági számokat kapnak. De a biciklisták babonásak, félnek a 8-astól. Hány olyan tagsági szám lehet, amiben nincs 8-as (de 0-val kezdődhet)?

(b) A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorban állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

(c) Egy versenyen 57-en indulnak; az újságok az első 6 helyezettet közlik. Hányféle lehet ez a lista?

(d) Egy kisváros 57 fős önkormányzati képviselőtestülete 6 fős delegációt küld a dániai testvérvárosukba. Hányféleképpen jelölhetik ki a 6 fős delegációt?

(e) Hányféle lehet a dániai delegáció, ha a népszerű Kovács urat mindenképp be akarják venni?

(f) Hányféle lehet a dániai delegáció, ha a népszerűtlen Kovács urat mindenképp ki akarják hagyni?

3. Oldd meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

4. (a) Mennyi az  $n$ . egységgyökök összege?

(b) Mennyi az  $n$ . egységgyökök szorzata?

(a)  $z^2 - iz + 2 = 0$

(b)  $z^2 = \bar{z}$

(ZH, 2000. november 2.)

5. Add meg algebrai alakban az  $(1 - i)^{2000} - i(1 + i)^{2002}$  kifejezést! (ZH, 2000. november 2.)

6. Legyen  $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  és  $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ . Milyen pozitív  $n$ -ekre lesz  $z_1^n + z_2^n$  valós?

7. Bizonyítsuk be, hogy a 2004. egységgyökök közül kiválasztható 876, melyek összege 0.

8. Mennyi  $\sqrt[5]{2i - \sqrt{12}}$ ?

9. Oldd meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán! Az eredményt algebrai alakban add meg!

(a)  $2i \cdot z^3 = (1 + i)^8$

(b)  $5(z^2 + (\bar{z})^2) = z(12 - 6i)$

(ZH, 2004. december 16.)

(ZH, 2004. december 9.)

10. (a) Tíz gyerek hányféleképpen állítható úgy sorba, hogy Jancsi és Juliska egymás mellett álljanak? (ZH, 2000. december 7.)

(b) Egy gimnáziumban 16 osztály van, az osztálylétszám mindenütt 40. Mindegyik osztály 5 tagú küldöttséget küld az iskolai diákbizottságba. Hányféle lehet a diákbizottság összetétele?

11. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\varepsilon$  egy 10-edik és  $\varepsilon'$  egy 25-ödik egységgyök, akkor  $\bar{\varepsilon} \cdot \varepsilon'$  egy 100-adik egységgyök! (ZH, 2005. november 3.)

12. Van-e a kilencedik egységgyökök között pontosan hat, melyek összege zérus? És pontosan hét?

13. Hol van a hiba a következő „levezetésben”?  $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = -1$