8. gyakorlat
Lineáris leképezések, sajátérték, sajátvektor

1. Az $\mathcal{A}: V_1 \mapsto V_2$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy teljesül rá az alábbi két feltétel:
(a) Tetszőleges 7 elem képe lineárisan összefüggő.
(b) Tetszőleges 8 lineárisan független V_1-beli elem között van olyan, amelyiknek a képe nem $\underline{0}$.
Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\dim V_1 \leq 13$. (ZH, 2003. december 2.)

2. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere és $\mathcal{A}: V \mapsto V$ az a lineáris transzformáció, amely minden $\underline{v}$ vektorhoz az x tengelyre vett tükörképét rendeli. Határozd meg $\mathcal{A}$ minden sajátértékét és sajátvektorát!

3. Keresd meg a az alábbi mátrix minden sajátértékét és sajátvektorát!
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

---

4. Keresd meg az alábbi mátrix összes sajátértékét és a legnagyobb sajátértékhez tartozó összes sajátvektort is!
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Határozd meg V alábbi lineáris transzformációinak sajátértékeit, sajátvektorait!
(a) az a leképezés, amely minden vektorhoz a $\underline{0}$-t rendeli;
(b) az a leképezés, amely az (x, y) vektorhoz az $(x+y, 0)$ vektort rendeli;
(c) az origó körüli $+90°$-os forgatás.

6. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}: V \mapsto V$ lineáris transzformációnak a $\lambda = -1$ sajátértéke. Igaz-e, hogy a $\lambda = -1$ az $\mathcal{A}^3$ transzformációnak is sajátértéke? (ZH, 2007. november 28.)

---

7. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az alábbi A mátrixnak a 0 sajátértéke legyen!
A kapott mátrixnak keressük meg a
többi sajátértékét is és a legnagyobb sajátértékhez adjuk meg a sajátalteret! (ZH, 2002. december 5.)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}$$

8. Tekintsük a legfeljebb harmadfokú, valós együtthatós polinomokat (azaz $ax^3 + bx^2 + cx + d$ alakú kifejezéseket, ahol $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$). Ezeket értelemszerűen össze tudjuk adni, vagy meg tudjuk szorozni egy valós számmal. Így egy V vektorteret kapunk (ezt érdemes ellenőrizni). Mutasd meg, hogy az alábbi $\mathcal{A}: V \to V$ függvények lineáris transzformációk és határozd meg az összes sajátértéküket és sajátvektorukat! Minden polinomnak feleltessük meg
(a) a deriváltját;
(b) a deriváltjának x-szeresét.

9. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció egy 2006 dimenziós V vektortéren és legyen A az $\mathcal{A}$ leképezésnek egy B bázisban felírt mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy ha $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = 2000$, akkor $\det A = 0$ teljesül! (ZH, 2006. január 6.)

10. Legyen A olyan négyzetes mátrix, amelynek nincs valós sajátértéke. Bizonyítsuk be, hogy
(a) A-nak létezik inverze; (b) A^{-1}-nek sincs valós sajátértéke.

11. Az alábbi A mátrixról és $\underline{v}$ vektorról tudjuk, hogy $\underline{v}$ sajátvektora A-nak.
(a) Határozzuk meg a p paraméter értékét!
(b) Határozzuk meg A egy sajátértékét!
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

12. Legyen V tetszőleges (legalább 1, de véges dimenziós) vektortér és $\mathcal{A}: V \mapsto V$ lineáris transzformáció. Bizonyítsuk be, hogy ha $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ teljesül, akkor $\mathcal{A}$-nak a 0 sajátértéke. (ZH, 2002. december 20.)

13. Tekintsük azt a lineáris transzformációt, amely a négydimenziós tér bázisvektorait ciklikusan egymásba viszi át. Mik ennek a transzformációnak a sajátértékei és sajátvektorai?

14. Melyek azok a véges dimenziós valós V vektorterek, melyeken létezik olyan $\mathcal{A}: V \mapsto V$ lineáris transzformáció, amelyre $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 2 \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$ teljesül? (ZH, 2007. november 28.)