

7. gyakorlat
Lineáris leképezések

1. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ az a függvény, amely a tér (x, y, z) vektorához a sík $(x - y + z, x - y + z)$ vektorát rendeli.
- (a) Mutasd meg, hogy \mathcal{A} lineáris leképezés!
(b) Határozd meg $\text{Ker } \mathcal{A}$ -t és $\text{Im } \mathcal{A}$ -t!
(c) Legyen $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a tér, $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ pedig a sík „szokásos” bázisa. Írd fel \mathcal{A} mátrixát a B és C bázisok szerint!

-
2. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere. Döntsd el, hogy az alábbi V -ről V -be menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Ha igen, add meg a kép- és magterüket! Minden \underline{v} vektornak feleltessük meg
- (a) az x tengelyre vett tükörképét;
(b) azt az x tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a \underline{v} koordinátái közül a nagyobb;
(c) azt az x tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a \underline{v} koordinátáinak összege;
(d) a $+90^\circ$ -kal való elforgatottját.
3. Írd fel az alábbi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ lineáris leképezések mátrixát a „szokásos” $\{(1, 0), (0, 1)\}$ bázisban!
- (a) az y tengelyre való tükrözés;
(b) az origó körüli $+60^\circ$ -os forgatás;
(c) előbb egy y tengelyre való tükrözés, majd egy origó körüli $+60^\circ$ -os forgatás.

4. Milyen leképezésekhez tartoznak az alábbi mátrixok a sík vektorterén?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

5. Jelölje V a valós számpárok (azaz a síkvektorok) szokásos vektorterét. Egy $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformációról tudjuk, hogy az $(1, 2)$ vektorhoz a $(6, 7)$ vektort, a $(-1, 2)$ vektorhoz pedig a $(8, 9)$ vektort rendeli. Írjuk fel \mathcal{A} mátrixát a „szokásos”, vagyis az $(1, 0)$ és $(0, 1)$ vektorokból álló bázisban! (ZH, 2002. december 12.)
6. Legyen $\mathcal{A} : V \mapsto V$ olyan lineáris transzformáció, amire $\text{Im } \mathcal{A} \subseteq \text{Ker } \mathcal{A}$. Bizonyítsuk be, hogy az \mathcal{A} transzformáció (tetszőleges bázisban felírt) A mátrixára $A^2 = 0$. (ZH, 1997. november 1.)

-
7. Döntsd el, hogy az alábbi \mathbb{R}^3 -ről \mathbb{R}^2 -be (vagyis a szokásos térről a szokásos síkba) menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Ha igen, add meg a kép- és magterüket, ezek dimenzióját, valamint írd fel a mátrixukat a „szokásos” bázisok (azaz \mathbb{R}^3 -ben az $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, \mathbb{R}^2 -ben az $\{(1, 0), (0, 1)\}$) szerint!

$$\mathcal{A} : (x, y, z) \rightarrow (x, z) \quad \mathcal{B} : (x, y, z) \rightarrow (x \cdot y, x \cdot z) \quad \mathcal{C} : (x, y, z) \rightarrow (x + y, x + z)$$

8. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere és legyen $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ egy lineáris transzformáció. Az \mathcal{A} mátrixa a $\underline{b}_1 = (1, 1)$ és $\underline{b}_2 = (1, -1)$ vektorokból álló bázisban felírva az alábbi:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg x és y értékét, ha tudjuk, hogy $(3, 1) \in \text{Ker } \mathcal{A}$. (ZH, 2006. november 30.)

9. Legyen \mathcal{A} lineáris leképezés V_1 -ről V_2 -be, $\underline{v}_i \in v_1$. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
- (a) Ha $\mathcal{A}(\underline{v}_1) = \mathcal{A}(\underline{v}_2)$, akkor $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \text{Ker } \mathcal{A}$.
(b) Ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ generátorrendszer V_1 -ben, akkor $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ generátorrendszer V_2 -ben.
(c) Ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ generátorrendszer V_1 -ben, akkor $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ generátorrendszer $\text{Im } \mathcal{A}$ -ban.
(d) Ha $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ generátorrendszer $\text{Im } \mathcal{A}$ -ban, akkor $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ generátorrendszer V_1 -ben.