

5. gyakorlat
Determináns, vektoriális szorzat, mátrixok

1. Számold ki a *kifejtési tétel felhasználásával* az alábbi determináns értékét!
2. Írd fel az $A(1, 1, 7)$, $B(3, 2, 8)$, $C(8, 4, 8)$ pontokon átmenő sík egyenletét!

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

3. A (100×100) -as A mátrixra teljesül, hogy minden sorában az elemek összege 1. A (100×100) -as B mátrix minden eleme 2. Határozzuk meg az $A \cdot B$ szorzatot! (ZH, 2006. október 26.)

4. Számold ki az alábbi mátrixokat!

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2008}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2007}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

5. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges A négyzetes mátrixra! (0-val jelöltük a csupa nulla mátrixot.)

(a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$, akkor $\det A = 0$.

(b) Ha $\det A = 0$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$. (ZH, 2003. január 9.)

6. Legyen A $n \times n$ -es mátrix, $x, y \in \mathbb{R}^n$ pedig n magas oszlopvektorok. Bizonyítsd be, hogy ha $x \neq y$, de $Ax = Ay$ akkor $\det A = 0$.

7. Legyen A olyan $n \times n$ -es mátrix, melyre $A = A^T$ és A^2 főátlójában csak nullák állnak. Igazoljuk, hogy A a nulla mátrix (minden eleme 0). (ZH, 1999. december 16.)

8. Egy $n \times n$ -es A mátrix minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével. Mi lesz az így kapott n^2 darab szorzat összege?

9. Tekintsük az $A = (2, 1, 4)$, $B = (1, 1, 6)$, $C = (3, 0, 1)$, $D = (0, 1, 1)$, $E = (7, 1, 3)$ pontokat a szokásos 3 dimenziós térben. Határozzuk meg az A , B és C , illetve C , D és E pontok által meghatározott síkok metszetegyeneseinek irányvektorát! (ZH, 2007. november 8.)

10. Legyenek $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($n \times n$)-es mátrixok. Bizonyítsd be, hogy ha A oszlopai lineárisan függetlenek és B oszlopai is lineárisan függetlenek, akkor az $A \cdot B$ mátrix oszlopai is lineárisan függetlenek!

11. Számold ki a *kifejtési tétel felhasználásával* az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

12. Írd fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(1, 2, 6)$ ponton és tartalmazza az $\frac{x-2}{2} = \frac{z-11}{10}$, $y = 1$ egyenletrendszerű egyenest!

13. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amire az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix esetén $AB = BA$ teljesül.

14. Határozd meg az összes olyan 2×2 -es X mátrixot, amelynek minden eleme racionális szám és amelyre $X^{2008} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ teljesül.

15. A (100×100) -as A mátrix első 50 oszlopának minden eleme 3, az utolsó 50 oszlop minden eleme 2. A (100×100) -as B mátrix minden oszlopára teljesül, hogy abban az első 50 elem összege 2, az utolsó 50 elem összege 3. Határozzuk meg az $A \cdot B$ szorzatot! (ZH, 2006. november 9.)

16. Egy $2k \times 2k$ -as mátrix főátlójának minden eleme γ , a bal alsó sarkot a jobb felső sarokkal összekötő átló minden eleme δ , a többi elem pedig 0. Számítsd ki a mátrix determinánsát!

17. A 100×100 -as A mátrix főátlójában és a 100-adik sorában mindenhol 1-es áll, az összes többi (9801 darab) eleme 0. Határozzuk meg az A^{100} mátrixot! (ZH, 2004. november 4.)