

3. gyakorlat Dimenzió, Gauss-elimináció

1. Oldd meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket! Használd a Gauss-elimináció módszerét!

$$\begin{array}{rcl} -x + 3y + 3z & = & 2 \\ 3x + y + z & = & 4 \\ 2x - 2y + 3z & = & 10 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x + 3y + 2z & = & 3 \\ 3x + 5y + 10z & = & 5 \\ 3x + 2y + 13z & = & 2 \\ 6x + 13y + 17z & = & 13 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x + 3y + 2z & = & 3 \\ 3x + 5y + 10z & = & 5 \\ 3x + 2y + 13z & = & 2 \\ 6x + 13y + 17z & = & 11 \end{array}$$

2. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset! (ZH, 2004. december 14.)

$$\begin{array}{rcl} -x + 3y - z - 3w & = & -2 \\ 2x - 6y + 5z + 12w & = & 7 \\ 3x - 9y + 5z + cw & = & 9 \end{array}$$

3. Az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3, b_4 vektorok generálják ugyanazt a V lineáris teret. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az alábbi négy vektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő: $a_1 + a_2, a_3 + b_1, a_3 + b_2, b_3 + b_4$.

4. Lineárisan függetlenek-e az alábbi, \mathbb{R}^4 -beli vektorrendszerek?

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix} & \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} & \text{(d)} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 33 \\ \sqrt{2} \\ 5 \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -51 \\ 19 \\ \sqrt[3]{19} \\ 44 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

5. A t paraméter mely valós értékeire lesz az alábbi három síknak egynél több közös pontja?

$$\begin{array}{l} S_1: x + 2y + z = 4 \\ S_2: 2x + y + 8z = 5 \\ S_3: 5x + y + tz = 11 \end{array}$$

6. Adjuk meg a térben az alábbi egyenletekkel megadott S_1, S_2 és S_3 síkok (összes) metszéspontját! (ZH, 2001. október 31., 2004. december 20.)

$$\begin{array}{ll} S_1: x + y + z = 6 & S_1: 2x - y + 5z = 3 \\ \text{(a)} S_2: 2x + 3y - 2z = 0 & \text{(b)} S_2: 3x + 2y + 6z = 4 \\ S_3: 5x + 7y - 3z = 6 & S_3: 4x - 9y + 13z = 9 \end{array}$$

7. Bizonyítsuk be, hogy ha a V vektortérben az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ egy lineárisan független rendszer és $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_{k+1}$ pedig egy generátorrendszer, akkor a két vektorrendszer közül pontosan az egyik bázist alkot V -ben.

8. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszereknek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset! (ZH, 2004. november 4., 2006. október 26.)

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{array}{rcl} 2x + 6y + z & = & -6 \\ 2x + 11y + 11z & = & 14 \\ 4x + 10y + cz & = & -20 \\ 2x + 9y + (c + 10)z & = & 6 \end{array} & \text{(b)} \begin{array}{rcl} -x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 & = & 1 \\ 5x_1 + 15x_2 - 2x_3 + 26x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + c \cdot x_4 & = & 4 \\ 4x_1 + 12x_2 + x_3 + (c + 14) \cdot x_4 & = & 11 \end{array} \end{array}$$

9. Legyenek $\underline{u}, \underline{v}$ és \underline{w} a V (tetszőleges) vektortér lineárisan független vektorai. A p valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a} = \underline{u} - \underline{v}$, $\underline{b} = \underline{u} + \underline{w}$, $\underline{c} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$, $\underline{d} = p \cdot \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek? (ZH, 2004. december 14.)

10. Tekintsünk egy egész együtthatós lineáris egyenletrendszert (az egyenletekben a változók együtthatói és a jobb oldalon álló számok is egészek). Melyek igazak az alábbi állítások közül?

- (a) Ha van megoldás a racionális számok körében, akkor van az egész számok körében is.
(b) Ha van megoldás a valós számok körében, akkor van a racionális számok körében is.

11. Tudjuk, hogy egy vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{100}$ vektorok bázist alkotnak. Hány dimenziós a $\langle \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_{99} + \underline{v}_{100}, \underline{v}_{100} + \underline{v}_1 \rangle$ altér? (ZH, 2007. október 24.)

12. Tegyük fel, hogy adott egy lineáris egyenletrendszer, amelyről tudjuk, hogy megoldható és a megoldás egyértelmű. Ha most megváltoztatjuk az egyenletek jobb oldalán álló számokat (de csak azokat), előfordulhat-e, hogy a kapott egyenletrendszernek

- (a) nincs megoldása;
(b) végtelen sok megoldása van?