Algoritmuselmélet vizsga, 2004. január 6.

A feladatokhoz indoklást kérünk. Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez/aláíráshoz 20 pontot kell elérni.

1. (a) Add meg az alábbi nyelvosztályok definícióját: R, P, $EXPTIME$ és $PSPACE$. (A $TIME(t(n))$ és $SPACE(s(n))$ osztályokat nem kell definiálnod, ezeket felhasználhatod.)
   (b) Add meg az R, P, $EXPTIME$ és $PSPACE$ nyelvosztályok között fennálló tartalmazásokat. (Bizonyítani nem kell.)

2. Bizonyítsd be, hogy egy n csúcsból álló AVL-fa szintszáma $O(\log n)$. A bizonyítás során az AVL-fáról csak a definíciót használhatod fel.

3. Egy vizsga m darab feladatból áll, ezekkel $p_1, p_2, \ldots, p_m$ pontot lehet szerezni egyenként (az i-edikkel p_i-t). Tudjuk, hogy az egyes feladatok tökéletes megoldásához $k_1, k_2, \ldots, k_m$ percre van szükségünk (az i-edikhez kell k_i perc). A vizsga összesen T percből áll, a jeleshez I pontot kell elérni, és egy feladatra vagy a teljes pontot megkapjuk, ha a megoldás tökéletes vagy semmit se kapunk, ha a megoldás nem tökéletes. P-ben van-e vagy NP-teljes-e az a nyelv, amely azon $(p_1, p_2, \ldots, p_m, k_1, k_2, \ldots, k_m, T, I)$ egész számokból álló $2m+2$ hosszú számsorozatokat tartalmazza, amelyekhez tartozó vizsgán el tudjuk érni a jeleshez szükséges ponthatárt?

4. Adott egy n elemű (nem feltétlenül rendezett) tömb. Adj $O(n)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy a tömbben szereplő számok egy számtani sorozat egymást követő n elemét alkotják-e. (Azaz azt kell eldöntenünk, hogy van-e olyan a és d szám, hogy a tömbben éppen az $a, a+d, a+2d, \ldots a+(n-1)d$ számok szerepelnek valamilyen sorrendben.)

5. Tudjuk, hogy az $L \subseteq \{0,1\}^*$ nyelv rekurzívan felsorolható. Igaz-e, hogy az L-ből képezett alábbi $L^{\%}$ nyelv is rekurzívan felsorolható?

   $$L^{\%} = \{u^* \in \{0,1\}^* \mid u \in L\}$$

   (Vagyis $L^{\%}$-ba azon $\{0,1\}^*$-beli szavak tartoznak, melyek valamely L-beli szó néhányszori megismétlésével kaphatóak. Például ha $L = \{\ 00, 111\ \}$, akkor $L^{\%}$ a páros hosszú 0-sorozatokat és a hárommal osztható hosszú 1-sorozatokat tartalmazza.)

6. Éllistával adott egy irányítatlan fa, melynek minden pontjához egy pozitív egész súly van rendelve. Adjunk $O(n)$ lépésszámú algoritmust, ami megkeres a fában egy maximális súlyú független ponthalmazt. (Egy ponthalmaz független, ha semelyik két eleme nincs összekötve, az ilyen ponthalmazok közül keresünk egy olyat, melyre a beletartozó pontok súlyainak összege maximális.)