Csima Judit
csima@cs.bme.hu

5. gyakorlat
Dijkstra algoritmus, kupac

1. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{a, b, c, d, e, f\}$, az élek és súlyaik pedig az alábbiak: $s(a, b) = 5$, $s(a, e) = 6$, $s(b, c) = 4$, $s(b, d) = 6$, $s(c, a) = 3$, $s(c, d) = 1$, $s(d, e) = 2$, $s(e, c) = 2$, $s(e, f) = 1$, $s(f, b) = 3$, $s(f, c) = 1$, $s(f, d) = 1$.
Dijkstra módszerével határozza meg a-ból az összes többi csúcsba vezető legrövidebb út hosszát. (Indokolni nem kell, de látszódjon, lépésenként hogyan változik a távolságokat tároló D tömb és a KÉSZ halmaz.)

---

2. Adjon példát olyan gráfra, ahol a Dijkstra-algoritmus nem működik jól.

3. Adjuk meg az összes olyan minimális élszámú irányított gráfot (élsúlyokkal együtt), amely(ek)re az alábbi táblázat a Dijkstra–algoritmusban szereplő D[ ] tömb változásait mutathatja. Adja meg a legrövidebb utakat tartalmazó P[ ] tömb állapotait is.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
0	2	6	∞	∞	7
0	2	5	9	∞	6
0	2	5	6	9	6
0	2	5	6	8	6
0	2	5	6	7	6

4. A $G = (V, E)$ irányított gráfban a csúcsok egy része fontos, ezeknek a csúcsoknak a halmaza az $\emptyset \neq F \subseteq V$. A gráf minden éléhez tartozik egy pozitív élsúly. Az $u \in F$ fontos csúcs távolsága a $v \in F$ fontos csúcstól a legrövidebb olyan u-ból v-be menő út hossza, aminek nincs u-tól és v-től különböző fontos csúcsa. Legyen a gráf a mátrixával adott, és minden csúcsra adott az is, hogy fontos csúcs-e. Adjon algoritmust ami $O(|V|^2|F|)$ lépésben meghatározza az összes fontos csúcspár közötti távolságot!

5. A mátrixával adott G irányított gráf élei között van egy negatív súlyú él, a többi él súlya pozitív. A gráfban nincs negatív súlyú kör. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust az $s \in V(G)$ pontból az összes többi pontba vezető legrövidebb utak meghatározására.

6. (a) Építsen kupacot az órán tanult lineáris idejű módszerrel az alábbi tömbből: $31, 6, 50, 7, 2, 51$.
(b) Szúrja be az így kapott tömbbe az 1, majd ezután az 5 számot.
(c) Hajtson végre két egymást követő MINTÖR-t az így kapott kupacon.

7. Adjunk hatékony algoritmust egy kupac tizedik legkisebb elemének a megtalálására. Elemezzük a módszer költségét.

---

8. Egy város úthálózatát egy adjacencia mátrixával adott n csúcsú irányított gráf írja le. A gráf egyik csúcsában levő állatkertből öt elefánt szökött meg, ezeket szerencsére elfogták, a város öt különböző pontján tartják őket ketrecben. Szeretnénk egy elefánt-szállító autóval mindet begyűjteni, de az elefántok és az autó is nehéz, nem minden úton tudunk vele haladni. Minden élre ismert, hogy ott hány elefánttal tudunk közlekedni és ismert az élhez tartozó út hossza is. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy be tudjuk-e egy körben gyűjteni az összes elefántot (az állatkertből indulva és öt elefánttal oda visszaérkezve) és ha ez lehetséges, akkor javasol is egy lehetséges legrövidebb útvonalat. (Ha egy elefántot felvettünk, akkor azt csak az állatkertben engedjük ki.)

9. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{a, b, c, d, e, f\}$, az élek és súlyaik pedig a következőek: $s(a, b) = 6$, $s(a, c) = 5$, $s(a, e) = 8$, $s(b, a) = 5$, $s(b, e) = 1$, $s(b, f) = 2$, $s(c, b) = 2$, $s(c, f) = 4$, $s(e, b) = 6$, $s(e, d) = 3$, $s(f, d) = 1$, $s(f, e) = 1$.
a) Dijkstra-algoritmussal határozza meg a-ból az összes többi pontba vezető legrövidebb út hosszát. (Indokolni nem kell, de lépésenként írja fel a távolságokat tartalmazó D tömb és a KÉSZ halmaz állapotát.)
b) Vegyük hozzá a gráfhoz az (b, d) élet. Milyen $s(b, d) \geq 0$ súlyok esetén változnának meg ezzel a legrövidebb utak hosszai?
c) Egy él súlyát 1-gyel csökkentjük (az eredeti gráfban, ahol (b, d) él még nincsen). Mely élek esetében nem változnak meg ezzel az a-tól mért távolságok?

10. Vidéken autózunk, ahol benzinkút csak bizonyos falvakban van. Az A falubeli benzinkúttól indulunk és a B faluba akarunk elérni (ahol szintén van benzinkút). A falvak közötti utakat egy n csúcsú e élű, összefüggő, irányítatlan gráf írja le, melynek csúcsai a falvak, az élek pedig a falvak közötti utakat jelentik, egy él súlya a két falut összekötő útszakasz hossza. A gráf az éllistájával adott, és ezen kívül adott még az a k falu, amelyben van benzinkút. Adjon $O(ke \log n)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza az A-ból B-be vivő legrövidebb olyan útvonalat, melynek során soha nem kell 600 kilométernél többet autóznunk két benzinkút között.