Csima Judit
csima@cs.bme.hu

10. gyakorlat
Minimális költségű feszítőfa, P, NP, coNP

1. G irányítatlan gráf a következő éllistával (zárójelben a költségek, az élek mindkét végpontjukból fel vannak sorolva):
a:b(2),c(3); b:a(2),d(2); c:a(3),d(1); d:b(2),c(1),e(2),f(4); e:d(2),f(1),g(2); f:d(4),e(1),g(2),h(1); g:e(2),f(2),h(3); h:f(1),g(3);
Keressünk G-ben (a) Prim algoritmusával minimális költségű feszítőfát g-ből kiindulva! (b) Kruskal algoritmusával minimális költségű feszítőfát!

---

2. A szoftverpiacon n féle grafikus formátum közötti oda-vissza konverzióra használatos programok kaphatók: az i-edik és a j-edik között oda-vissza fordító program ára a_{ij}, futási ideje pedig t_{ij} (ha létezik).
(a) Javasoljunk módszert annak megtervezésére, hogy minden egyes formátumról a saját grafikus terminálunk által megértett formátumra a lehető leggyorsabban konvertáljunk! (Az ár nem számít.)
(b) Javasoljunk módszert annak eldöntésére, hogy mely programokat vásároljuk meg, ha azt szeretnénk a lehető legolcsóbban megoldani, hogy a megvett programok segítségével bármelyik formátumról bármelyik más formátumra képesek legyünk konvertálni. (Itt a futási idő nem számít).

3. Egy nagy filmes produkció filmet akar forgatni a városunkban. A város térképe egy irányítatlan gráffal adott, ahol a csúcsok a csomópontok az élek pedig a közvetlen utak közöttük. A filmesek minél több utat szeretnének lezárni a forgatás idejére, de minden egyes szakasz lezárásáért pénzt kérünk, a konkrét összeget tudjuk minden útra. (A filmesekneknek az összes út lezárására van pénzük.) Adjon algoritmust, ami meghatározza, hogy mely utakat engedjünk lezárni, ha a lezárás közben a városnak működnie kell (mindenhonnan mindenhova el kell tudni jutni) és a bevételünket maximalizálni akarjuk. A lépésszám legyen $O(n^2)$.

4. Mátrixával adott egy $G(V, E)$ irányítatlan gráf, melynek minden éléhez egy pozitív súly tartozik. A gráf minden csúcsa vagy egy raktárat vagy egy boltot jelképez, az élsúlyok a megfelelő távolságokat jelentik. Olyan G' részgráfját keressük G-nek, amely minden csúcsot tartalmaz, és amelyben minden bolthoz van legalább egy raktár, ahonnan oda tudunk szállítani (azaz van köztük út a gráfban). Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust egy a feltételeknek megfelelő minimális összsúlyú G' részgráf megkeresésére.

5. Bizonyítsa be, hogy az alábbi P_1, P_2, P_3 és P_5 eldöntési problémák NP-beliek, a P_4 pedig coNP-beli. Melyekről tudja belátni, hogy P-ben vannak?
P_1 : adott G páros gráf és k pozitív egész esetén van-e G-ben k élből álló párosítás?
P_2 : adott G irányítatlan gráfban van-e Euler kör?
P_3 : adott G irányítatlan gráf és k pozitív egész esetén van-e G-ben k darab független pont?
P_4 : adott m egész szám prím-e?
P_5 : adott $(s_1, \ldots, s_n)$ pozitív egészek és adott b egész pozitív szám esetén ki lehet-e választani néhány s_i-t, melyek összege b?

---

6. Bizonyítsa be az alábbi két problémáról, hogy NP-beliek. Melyikről tudja belátni, hogy P-ben van? Melyikről látja, hogy coNP-beli?
P_1 : adott G irányítatlan gráfban van-e legfeljebb 100 élből álló kör?
P_2 : adott G irányítatlan gráf és k pozitív egész esetén van-e G-ben legfeljebb k élből álló kör?

7. Irányítatlan gráf tárolására adjon meg egy adatszerkezetet az alábbi műveletekkel:
ÚJCSÚCS(v): a gráfhoz hozzáad egy új csúcsot;
ÚJÉL(u, v): a már létező u és v csúcsok közé felvesz egy élet;
VANÚT(u, v): *igen* értéket ad vissza, ha vezet az u és v csúcsok között út, egyébként pedig *nem* értéket.
Ha a tárolt gráfnak n csúcsa van, akkor mindhárom művelet lépésszáma legyen $O(\log n)$.