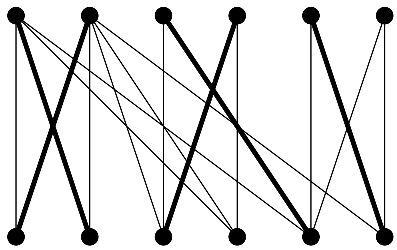
Algoritmusok elmélete
9. gyakorlat

2008. április 9.

1. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával : a:b,c; b:a,d; c:a,d; d:b,c,e,f; e:d,f,g; f:d,e,g,h; g:e,f,h; h:f,g;
   Keressünk G-ben
   (a) a-ból kiinduló mélységi feszítőfát! (Adja meg a mélységi és befejezési számokat is, az éleket pedig osztályozza típusok szerint.)
   (b) a-ból kiinduló szélességi feszítőfát!

2. Keressen javítóutat az alábbi páros gráfban!



3. A 6 pontú G gráf csúcsait jelölje x, y, z, u, v, w. A gráf egy mélységi bejárásánál a mélységi, ill. a befejezési számok a következők: x: 1,6; y: 2,4; z: 6,5; u: 3,3; v: 4,1; w: 5,2. Adjuk meg a bejáráshoz tartozó mélységi feszítőfa éleit. Rekonstruálható-e G az előző számok ismeretében?

4. Éllistával adott a súlyozott élű $G = (V, E)$ gráf. Tegyük fel, hogy az élek súlyai az 1,2,3 számok közül valók. Javasoljunk $O(n + e)$ uniform költségű algoritmust az $s \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának a meghatározására. (Itt n a G gráf csúcsainak, e pedig az éleinek a száma.

5. Egy $n \times n$-es sakktábla néhány mezőjén az ellenfél egy huszárja (lova) áll. Ha mi olyan mezőre lépünk, ahol az ellenfél le tud ütni, akkor le is üt, de egyébként az ellenfél nem lép. Valamelyik mezőn viszont a mi huszárunk áll. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy mely másik mezőkre tudunk (lólépések sorozatával) eljutni a nélkül, hogy az ellenfél leütne!

6. Egy számítógéphálózatban n számítógép van. Minden olyan eseményt, hogy az i-edik gép üzenetet küld a j-ediknek (i, j, t) formában feljegyezünk, ahol a t egész szám az üzenet küldésének időpontját jelöli. Ugyanabban a t időpontban egy gép több gépnek is küldhet üzenetet. Ha a t időpontban az i-edik gép vírusos volt, akkor egy (i, j, t) üzenet hatására a j-edik gép megfertőződhet, ami azt jelenti, hogy a $t + 1$ időponttól kezdve már a j-edik gép is vírusos lehet. Legyen adott az (i, j, t) hármasoknak egy m hosszú listája, valamint x, y és $t_0 < t_1$ egész számok. Azt kell eldöntenünk, hogy ha az x-edik gép a t_0 időpontban vírusos volt, akkor lehet-e emiatt az y-adik gép a t_1 időpontban vírusos. Adjon algoritmust, ami ezt a kérdést $O((t_1 - t_0)n + m)$ lépés után megválaszolja.

7. A $G(V, E)$ összefüggő, irányított gráf minden éle az $1, 2, \ldots, k$ számok valamelyikével van súlyozva. Egy út értéke legyen az úton található élek súlyainak *maximuma*. Határozza meg, hogy ha adott két csúcs $x, y \in V$, akkor mennyi a lehető legkisebb értékű x-ből y-ba vezető út értéke. Ha G éllistával adott és e éle van, akkor a lépésszám legyen $O(e \log k)$.

Gyakorló

8. Legyen G egy irányítatlan összefüggő gráf. Igaz-e, hogy
(a) G minden f éléhez van G-nek olyan mélységi bejárása, amelyben f egy faél?
(b) G minden f éléhez van G-nek olyan szélességi bejárása, amelyben f egy faél?
(c) G minden F feszítőfájához van G-nek olyan mélységi bejárása, amelyben F minden éle faél?
(d) G minden F feszítőfájához van G-nek olyan szélességi bejárása, amelyben F minden éle faél?

9. Egy bajnokságban $2n$ csapat vesz részt. Minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzést játszik. Minden mérkőzést a két résztvevő csapat valamelyikének a pályáján játszanak. A következő k forduló mindegyikére már adott, hogy ki kivel fog játszani (a beosztás tetszőleges lehet, pl. ugyanaz a két csapat többször is játszhat egymás ellen). Az viszont még nincs meghatározva, hogy melyik mérkőzés kinek a pályáján történjen. Olyan pályabeosztást szeretnénk készíteni az adott mérkőzésekhez, hogy minden csapat felváltva játsszon a saját pályáján és idegenben (azaz, amelyik csapat az első fordulóban otthon játszik, az legközelebb idegenben, utána megint otthon, stb). Adjon $O(kn)$ lépésszámú algoritmust, ami elkészít egy ilyen pályabeosztást vagy jelzi, hogy ez nem lehetséges.

10. Éllistával adott egy G gráf, melynek n csúcsa és e éle van. A gráf minden csúcsához hozzá van rendelve egy 1 és k közötti egész szám (címke). Találjunk (ha létezik) olyan *tarka* utat a gráfban, amelyben minden $1 \leq i \leq k$ címke pontosan egyszer fordul elő. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(k!\,(e+n))$.

11. Egy n pontú teljes gráf csúcsait kell kiszíneznünk csupa különböző színűre. Összesen $k \geq n$ féle szín áll rendelkezésre, de az egyes pontok színe nem teljesen tetszőleges. Minden v csúcshoz adott színeknek egy $S(v)$ listája, a v csúcsot csak az $S(v)$-ben szereplő színek valamelyikére színezhetjük. Adjon $O(nk^2)$ lépésszámú algoritmust, amely az $S(v)$ listák alapján eldönti, hogy van-e a megkötéseknek megfelelő színezés, és ha van ilyen, talál is egyet.