

1. Bizonyítsa be az alábbi nyelvekről, hogy NP-beliek. Melyekről tudja belátni, hogy P-ben vannak? Melyekről látja, hogy coNP-beliek?

$$L_1 = \{(G, k) \mid G \text{ páros gráf, } k \text{ pozitív egész, } G\text{-ben van } k \text{ élből álló párosítás}\}$$

$$L_2 = \{G \mid G \text{ irányítatlan gráf, } G\text{-ben van Euler kör}\}$$

$$L_3 = \{(G, k) \mid G \text{ irányítatlan gráf, } k \text{ pozitív egész, } G\text{-ben van } k \text{ darab független pont}\}$$

$$L_4 = \{(s_1, \dots, s_n, b) \mid s_i \text{ pozitív egész ha } 1 \leq i \leq n, b \text{ pozitív egész és ki lehet választani néhány } s_i\text{-t, melyek összege } b\}$$

2. Tegyük fel, hogy van egy olyan P eljárásunk, ami egy input G gráfra és k számra 1 lépés alatt megmondja, hogy van-e G -ben legalább k méretű független ponthalmaz.

(a) Tervezz olyan, a P eljárást használó algoritmust, ami polinom időben kiszámolja $\alpha(G)$ -t, a független pontok maximális számát!

(b) Tervezz olyan, a P eljárást használó algoritmust, amely polinom időben talál egy $\alpha(G)$ méretű független ponthalmazt!

3. Bizonyítsa be, hogy P-beli az olyan 4 színnel színezhető G gráfokból álló nyelv, melyekre igaz, hogy G csúcsai kiszínezhetőek a piros, kék, zöld, sárga színekkel úgy, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs kék.

4. Adjon Karp-redukciót a 3-SZÍN nyelvről a 4-SZÍN nyelvre!

5. A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazza meg a feladathoz tartozó nyelvet, majd adjon Karp-redukciót a H-út nyelvről erre a nyelvre.

6. Bizonyítsa be az alábbi két nyelvről, hogy NP-beliek. Melyikről tudja belátni, hogy P-ben van? Melyikről látja, hogy coNP-beli?

$$L_1 = \{G \mid G \text{ irányítatlan gráf, } G\text{-ben van legfeljebb 100 élből álló kör}\}$$

$$L_2 = \{(G, k) \mid G \text{ irányítatlan gráf, } k \text{ pozitív egész, } G\text{-ben van legfeljebb } k \text{ élből álló kör}\}$$

7. Tegyük fel, hogy van egy P programunk, amely egy n csúcsú G gráfról egy időegység alatt megmondja, hogy az kiszínezhető-e 3 színnel. Tervezz olyan P -t használó algoritmust, amely polinom időben megtalálja G egy 3 színnel való színezését (ha van ilyen egyáltalán)!

8. A $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráfban legyen $X \subseteq V$ és $\bar{X} = V - X$ az X halmaz komplementere. Jelölje $m(X)$ az olyan élek számát, melyek X és \bar{X} között futnak. Legyen

$$\text{maxvágás} = \{(G, k) : \exists X \subseteq V, \text{ hogy } m(X) \geq k\},$$

$$\text{maxfelezés} = \{(G, k) : \exists X \subseteq V, \text{ hogy } m(X) \geq k \text{ és } |X| = |\bar{X}|\}.$$

Igazolja, hogy $\text{maxvágás} \prec \text{maxfelezés}$.