Algoritmusok elmélete
11. gyakorlat

2008. április 25.

1. G irányítatlan gráf a következő éllistával (zárójelben a költségek, az élek mindkét végpontjukból fel vannak sorolva):
a:b(2),c(3); b:a(2),d(2); c:a(3),d(1); d:b(2),c(1),e(2),f(4); e:d(2),f(1),g(2); f:d(4),e(1),g(2),h(1); g:e(2),f(2),h(3); h:f(1),g(3);
Keressünk G-ben (a) Prim algoritmusával minimális költségű feszítőfát! (b) Kruskal algoritmusával minimális költségű feszítőfát! (c) Boruvka módszerével minimális költségű feszítőfát!

2. A szoftverpiacon n féle grafikus formátum közötti oda-vissza konverzióra használatos programok kaphatók: az i-edik és a j-edik között oda-vissza fordító program ára a_{ij}, futási ideje pedig t_{ij} (ha létezik).
(a) Javasoljunk módszert annak megtervezésére, hogy minden egyes formátumról a saját grafikus terminálunk által megértett formátumra a lehető leggyorsabban konvertáljunk! (Az ár nem számít.)
(b) Javasoljunk módszert annak eldöntésére, hogy mely programokat vásároljuk meg, ha azt szeretnénk a lehető legolcsóbban megoldani, hogy a megvett programok segítségével bármelyik formátumról bármelyik más formátumra képesek legyünk konvertálni. (Itt a futási idő nem számít).

3. Mátrixával adott egy $G(V, E)$ irányított gráf, melynek minden éléhez egy pozitív súly tartozik. A gráf minden csúcsa vagy egy raktárat vagy egy boltot jelképez, az élsúlyok a megfelelő távolságokat jelentik. Olyan G' részgráfját keressük G-nek, amely minden csúcsot tartalmaz, és amelyben minden bolthoz van legalább egy raktár, ahonnan oda tudunk szállítani (azaz van köztük út a gráfban). Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust egy a feltételeknek megfelelő minimális összsúlyú G' részgráf megkeresésére.

4. Irányítatlan gráf tárolására adjon meg egy adatszerkezetet az alábbi műveletekkel:
ÚJCSÚCS(v): a gráfhoz hozzáad egy új csúcsot;
ÚJÉL(u, v): a már létező u és v csúcsok közé felvesz egy élet;
VANÚT(u, v): *igen* értéket ad vissza, ha vezet az u és v csúcsok között út, egyébként pedig *nem* értéket.
Ha a tárolt gráfnak n csúcsa van, akkor mindhárom művelet lépésszáma legyen $O(\log n)$.

5. Legyen adva egy (egyszerű, irányítatlan, öszefüggő) n pontú G gráf éllistával, az élek súlyozásával együtt. Tegyük fel, hogy a G-ből a v_1 csúcs, valamint a v_1-re illeszkedő élek elhagyásával keletkező G' gráf még mindig összefüggő, és adott G' egy minimális költségű feszítőfája. Adjunk minél hatékonyabb algoritmust a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának az elkészítésére! (Teljes értékű megoldás: $O(n \log n)$ idejű algoritmus.)

6. Legyen $G = (V, E)$ egy súlyozott irányítatlan gráf, amiben minden él súlya pozitív. Tegyük fel, hogy G összefüggő, de nem teljes gráf. A G gráfhoz egy 0 súlyú élt akarunk hozzáadni úgy, hogy a keletkező G' gráfban a minimális feszítőfa súlya a lehető legkisebb legyen. Adjon algoritmust ami a mátrixával adott G gráfra $O(|V|^3)$ lépésben meghatározza, hogy melyik két, a G-ben nem összekötött pont közé húzzuk be az új élet.

7. Éllistával adott egy összefüggő, egyszerű, irányítatlan G gráf csupa különböző élsúlyokkal. Jelöljük n-nel a csúcsok, e-vel pedig az élek számát. Mutassunk egy lineáris (azaz $O(e)$) uniform költségű algoritmust, ami a G gráf egy minimális feszítőfájának $[2/3n]$ élét előállítja! (Egy olyan $[2/3n]$ elemszámú élhalmazt keresünk, ami biztosan része egy minimális költségű feszítőfának.)